Corolario 1. *1>0*

Demostración. Tenemos que

$$1 = 1^2 \;\; y \;\; 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; 1 > 0$$

□

Teorema 1. *En algún campo ordenado F, se cumplen las siguientes propiedades* $\forall\ x, y, z \in F$ *(a) Si* $x < y$*, y* $y < z$*, entonces* $x < z$
(b) $x < y$ *si y solo si* $x + z < y + z$*; similarmente,* $x < y$ *si y solo si* $x - z < y - z$
(c) Si $z > 0$*, entonces* $x < y \;\Rightarrow\; xz < yz$
(d) Si $z < 0$*, entonces* $x < y \;\Rightarrow\; xz > yz$
(e) Si $x, y > 0$*, entonces* $x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$

Demostración. **(a)** Suponga que $x < y$ y $y < z$. Por definición, esto quiere descir $y - x \in P$ y $z - x \in P$, entonces

$$z - x = z + 0 - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - z) \in P \quad \therefore \quad x < z$$

(b) Si $x < y$ entonces $y - x \in P$ por otro lado

$$y - x = y - x + 0 = y - x - z + z = y + z - x - z = y + z - (x + z) \;\; \therefore \;\; y + z - (x + z) \in P \;\; \therefore \;\; x + z < y + z$$

(c) Supongamos $z > 0$ y $x < y$. Por definición, $z \in P$ y $y - x \in P$ por O_2 $(y - x)z \in P$ esto es $yz - xz \in P$ esto quiere decir $xz < yz$

(d) Supongamos que $z < 0$ tenemos entonces que $-z \in P$ y si $x < y \;\Rightarrow\; y - x \in P$ según O_2 se tiene

$$(-z)(y - x) \in P \;\Rightarrow\; (-z)y + (-z)(-x) \in P \;\Rightarrow\; -zy + xz \in P \;\Rightarrow\; zy < zx$$

(e) Supongamos que $x, y > 0$

$\Rightarrow$

$$x < y \;\Rightarrow\; x^2 < xy \;\; y \;\; también \;\; x < y \;\Rightarrow\; xy < y^2 \;\; \therefore \;\; x^2 < xy < y^2 \;\; por \;\; lo \;\; que \;\; x^2 < y^2$$

Supongamos que $x, y > 0$

$\Leftarrow$

$$x^2 < y^2 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 \in P \;\Rightarrow\; y \;\; como \;\; y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \;\; entonces \;\; (y - x)(y + x) \in P$$

Al ser $x, y > 0$ debe ocurrir que $(y + x) > 0$ y por lo tanto $y - x \in P$ esto quiere decir que $x < y$

□

Corolario 2. *(a) Si* $x > 0$*, entonces* $x^{-1} > 0$*; si* $x < 0$*, entonces* $x^{-1} < 0$
(b) Si ambos lados de una desigualdad se dividen por un elemento positivo, la desigualdad se preserva
(c) Si ambos lados de una desigualdad se dividen por un elemento negativo, la desigualdad se invierte

Demostración. **(a)** Tenemos que $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$ por lo tanto x, x^{-1} tienen el mismo signo, analogamente si $x < 0$ y $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$ entonces x, x^{-1} deben tener el mismo signo y por tanto $x^{-1} < 0$

(b) Sea $z \in F$ tal que $z > 0$ entonces $z^{-1} \in P$ por lo tanto

$$x < y \;\Rightarrow\; y{-}x \in P \; y \; como \;\; z^{-1} \in P \;\; entonces \;\; (y{-}x)z^{-1} \in P \;\Rightarrow\; yz^{-1}{-}xz^{-1} \in P \;\Rightarrow\; xz^{-1} < yz^{-1}$$

$$\Rightarrow\; x \div z < y \div z$$

(c) Sea $z \in F$ tal que $z < 0$ entonces $z^{-1} \notin P$ y por tanto $-z^{-1} \in P$

$$x < y \;\Rightarrow\; y{-}x \in P \; y \; como \;\; -z^{-1} \in P \;\; entonces \;\; (y{-}x)(-z^{-1}) \in P \;\Rightarrow\; -yz^{-1}{+}xz^{-1} \in P \;\Rightarrow\; yz^{-1} < xz^{-1}$$

$$\Rightarrow\; y \div z < x \div z$$

□

Teorema 2. *Propiedades de las desigualdades En algún campo ordenado F, se cumplen las siguientes propiedades*
(a) $0 < x < y \;\Rightarrow\; 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Demostración. **(a)** $\Rightarrow$ Supongamos que $0 < x < y$ por el corolario se tiene $x^{-1} > 0$ y $y^{-1} > 0$. Entonces $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} > 0$. Multiplicamos ahora ambos miembros de la desigualdad

$$x < y \;\Rightarrow\; x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) \;\Rightarrow\; (xx^{-1})y^{-1} < (yy^{-1}x^{-1}) \;\Rightarrow\; y^{-1} < x^{-1}$$

□