Números Racionales $\mathbb{Q}$

Definición 1. *El conjnuto de números racionales de un campo ordenado F es el conjunto*

$$\mathbb{Q} = \{x \in F \mid \exists\ m.n \in \mathbb{Z}\ \ tal\ \ que\ \ n \neq 0 \quad y \quad x = \frac{m}{n}\}$$

Axiomas que satisfacen los números racionales.

Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$, entonces

A_0 $a + b \in \mathbb{Q}$ (Cerradura)

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{m'}{n'} \quad \Rightarrow \quad a + b = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'} \in \mathbb{Q}$$

por las propiedades de los enteros
A_1 $a + b = b + a$ (Conmutatividad) es hereditaria de F
A_2 $a + (b + c) = (a + b) + c \in \mathbb{Q}$ (Asociatividad) es hereditaria de F
A_3 $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (Neutro Aditivo)

$$a = \frac{m}{n}, \quad 0 = \frac{0}{1} \quad \Rightarrow \quad a + 0 = \frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 1 + n \cdot 0}{n \cdot 1} = \frac{m}{n} = a$$

A_4 Dado a $\exists - a \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = 0$ (Inverso Aditivo)

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{-m}{n} \quad \Rightarrow \quad a + b = \frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn + (-mn)}{nn} = \frac{0}{nn} = 0 \in \mathbb{Q}$$

M_0 $a \cdot b = ab \in \mathbb{Q}$ (Cerradura)

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{m'}{n'} \quad \Rightarrow \quad ab = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'} \in \mathbb{Q}$$

por las propiedades de los enteros
M_1 $ab = ba \in \mathbb{Q}$ (Conmutatividad) es hereditaria de F
M_2 $(ab)c = a(bc) \in \mathbb{Q}$ (Asociatividad) es hereditaria de F
M_3 $\exists 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $a1 = 1a = 1$ (Neutro Multiplicativo)

$$a = \frac{m}{n}, \quad 1 = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n} = a$$

M_4 Dado a $\neq 0 \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (Inverso Multiplicativo)

$$\forall\ x \in \mathbb{Q} \ \ x = \frac{m}{n}, \ \ \exists\ x^{-1} \in \mathbb{Q}, \ \ x^{-1} = \frac{b}{a} \ \ tal \ \ que \ \ \ x \cdot x^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Distrbutividad: $a(b + c) = ab + ac$ es hereditaria de F
Orden.
O_1, O_2 y O_3 son hereditarias de F
En conclusión $\mathbb{Q}$ si es un campo ordenado