TEMAS MATEMATICOS

EL METODO DE LA INDUCCION MATEMATICA

I. S. SOMINSKII
Instituto Pedagógico de Novgorod

Quinta edición del original ruso (1959) traducida y adaptada al inglés por LUISE LANGE y EDGAR E. ENOCHS.

ESTUDIO DE NUEVAS OBRAS DE MATEMATICA PUBLICADAS EN EUROPA ORIENTAL. Proyecto a cargo de ALFRED L. PUTNAM e IZAAK WIRSZUP, del Departamento de Matemáticas, Universidad de Chicago, con el auspicio de la National Science Foundation.

Noriega Editores

EDITORIAL LIMUSA

MEXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Título de la obra en inglés:
THE METHOD OF MATHEMATICAL INDUCTION
© by The University of Chicago, Chicago, Ill.

Versión española:

JOSE HERNAN PEREZ CASTELLANOS
Ingeniero Industrial,
Profesor titular de Matemáticas de la
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y
Eléctrica del Instituto Politécnico
Nacional de México.

Revisión:

ALEJANDRO ODGERS LOPEZ
Maestría en Matemáticas,
Investigador de Tiempo Completo y
Catedrático de Matemáticas de la
Universidad Nacional Autónoma de México.

Balderas 95, Primer piso, 06040, México, D.F.
Teléfono 521-50-98
Fax 512-29-03
Télex 1762410 ELIME

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1972
Primera reimpresión: 1976
Segunda reimpresión: 1976
Tercera reimpresión: 1982
Cuarta reimpresión: 1984
Quinta reimpresión: 1986
Sexta reimpresión: 1988
Séptima reimpresión: 1990
Impreso en México
(9284)

ISBN 968-18-0702-2

Prefacio

EL METODO de la inducción matemática se usa ampliamente en la demostración matemática. Sin dominar este método, es imposible estudiar a fondo las matemáticas. Además, la idea básica en que se apoya el método de la inducción matemática, es de gran interés no sólo para los estudiantes de matemáticas y de las ciencias aplicadas, sino también para estudiantes de otras disciplinas.

En el capítulo 1 y en la sección 2 del capítulo 2 se presentan las ideas fundamentales del método de la inducción matemática y algunas de sus aplicaciones más sencillas. Para comprender esta parte del texto, sólo se necesita tener los conocimientos adquiridos en los primeros cursos del álgebra de secundaria. Sin embargo, para el resto del libro, es útil haber cursado dos años de álgebra y un año de trigonometría.

Esta monografía es particularmente apropiada para el estudio independiente. Presenta gran número de problemas, algunos de los cuales se resuelven como parte del texto. No obstante, más de la mitad de los problemas se dan como ejercicios para el lector, quien encontrará las soluciones al final de este estudio.

Contenido

Introducción

Cualquier proposición puede clasificarse como *general* o *particular*. Ejemplos de proposiciones *generales* son:

Todos los ciudadanos de la U.R.S.S., tienen derecho a una educación.
Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.
Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.

Ejemplos de proposiciones *particulares* son:

Petrov tiene derecho a una educación.
Las diagonales del paralelogramo *ABCD* se bisecan mutuamente.
140 es divisible entre 5.

El proceso de obtener una proposición particular de una general se llama *deducción*. Considérense estas proposiciones:

1) Todos los ciudadanos de la U.R.S.S., tienen derecho a una educación.
2) Petrov es un ciudadano de la U.R.S.S.
3) Petrov tiene derecho a una educación.

De la proposición general (1), junto con la proposición particular (2), se obtiene una proposición particular (3).

El proceso de obtener proposiciones generales de proposiciones particulares se llama *inducción*. El razonamiento inductivo puede conducir a conclusiones falsas así como a verdaderas. Se pondrá en claro este punto mediante dos ejemplos.

PRIMER EJEMPLO.

1) 140 es divisible entre 5.
2) Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.

La proposición general (2), obtenida de la proposición particular (1) es verdadera.

SEGUNDO EJEMPLO.

1) 140 es divisible entre 5.
2) Todos los números con tres cifras significativas son divisibles entre 5.

En este caso, la proposición general (2), deducida de la proposición particular (1), es falsa.

¿Cómo puede aplicarse la inducción en las matemáticas, de manera que sólo se obtengan proposiciones generales verdaderas a partir de las proposiciones particulares? A continuación se da la respuesta a esta pregunta.

1

El método de la inducción matemática

1. EJEMPLOS DE INDUCCION ERRONEA EN LAS MATEMATICAS

Primero considérense dos ejemplos del tipo de inducción que es inadmisible en las matemáticas.

EJEMPLO 1. Sea

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Las siguientes igualdades son fáciles de verificar:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Con base en estos cuatro resultados, podría concluirse que para *todos* los números naturales n, se cumple que

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

EJEMPLO 2. A continuación considérese el trinomio $x^2 + x + 41$, analizado por primera vez por el famoso matemático L. Euler.[1] Si en este trinomio se remplaza x por el número 0, se obtiene el número *primo* 41. Si se remplaza x por el número 1, nuevamente se obtiene un número *primo*, a saber 43. Si se continúa en esta forma y se remplaza x por los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, sucesivamente, se obtiene *en cada uno de los casos*, un *número primo*: 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, respectivamente. Basándose en estos resultados, podría concluirse que para *todo* entero no negativo x, el valor del trinomio es un *número primo*.

¿Por qué el razonamiento usado en estos ejemplos es inadmisible en las matemáticas? ¿En qué forma se invalida el razonamiento?

En ambos ejemplos, el razonamiento empleado nos condujo a establecer una *proposición general* referente a *todo* n (o todo x) basándose en las proposiciones que se han encontrado verdaderas para ciertos valores *particulares* de n (o de x). Así, sucede que la proposición general obtenida en el ejemplo 1 es verdadera, tal y como se verá en el ejemplo 5 que se da posteriormente; sin embargo, la proposición general obtenida en el ejemplo 2 es falsa. De hecho, mientras se puede demostrar que el trinomio $x^2 + x + 41$ produce números primos para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 39$, también se ve que para $x = 40$, el valor del trinomio es 41^2, que es un número compuesto.

La inducción tiene amplias aplicaciones en las matemáticas, pero debe usarse con cuidado o puede conducir a conclusiones erróneas.

2. MAS EJEMPLOS DE INDUCCION ERRONEA

En el ejemplo 2 se ha encontrado una proposición que resulta verdadera en cuarenta casos, pero que no es verdadera en general. Se darán otros dos ejemplos de proposiciones que son verdaderas en algunos casos particulares, sin ser verdaderas en general.

EJEMPLO 3. El binomio $x^n - 1$ (donde n es un número natural) es muy interesante para los matemáticos ya que está íntimamente relacionado con el problema geométrico de dividir una circunferencia en n partes iguales. Por ello, no debe sorprender que este binomio se haya estudiado detenidamente y con atención particular al problema de resolverlo en factores con coeficientes enteros.

[1] Matemático y físico suizo (1707-1783).

Al estudiar estas factorizaciones para muchos valores particulares de n, los matemáticos notaron que, en cada uno de los casos estudiados, los valores absolutos de los coeficientes de los factores nunca excedieron al número 1. Así,

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1, \\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1) \\
x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1), \\
x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), \\
x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \\
x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Se construyeron tablas de los coeficientes y, en cada uno de los casos, los coeficientes tenían la propiedad antes mencionada. Sin embargo, fallaron todos los intentos para probar que la proposición era verdadera para todos los valores de n.

Finalmente el problema fue resuelto en 1941 por V. Ivanov con el siguiente resultado: si $n < 105$, el binomio $x^n - 1$ tiene la propiedad anterior. No obstante, uno de los factores de $x^{105} - 1$ es el polinomio

$$
\begin{aligned}
&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} \\
&\quad + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} \\
&\quad + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} \\
&\quad + x + 1,
\end{aligned}
$$

que ya no tiene esta propiedad.

EJEMPLO 4. ¿En cuántas partes se divide el espacio mediante n planos que pasan por el mismo punto, pero sin que tres de ellos se intersequen en la misma recta?

Consideremos los casos más sencillos de este problema: un plano divide el espacio en 2 partes. Dos planos que pasan por un punto común dividen el espacio en 4 partes. Tres planos que pasan por un punto común, pero sin tener ninguna recta común, dividen el espacio en 8 partes.

A primera vista puede pensarse que conforme el número de planos se incrementa en 1, se dobla el número de partes en que éstos dividen el espacio; de manera que 4 planos dividirían al espacio en 16 partes, 5 planos en 32 partes, y así sucesivamente; o, en general, que n planos dividirían al espacio en 2^n partes.

En realidad, éste no es el caso: 4 planos dividen al espacio en 14 partes, 5 planos lo dividen en 22 partes. En general, n planos dividen al espacio en $n(n-1)+2$ partes.[1]

Estos ejemplos ilustran el hecho, sencillo pero importante: *una proposición puede ser verdadera en muchos casos especiales y, sin embargo, no cumplirse en general.*

3. EL PRINCIPIO DE LA INDUCCION MATEMATICA

En seguida surge la siguiente pregunta: supóngase que se tiene una proposición relativa a los números naturales y se ha encontrado que ésta se cumple en algunos casos particulares. ¿Cómo puede determinarse si la proposición se cumple en general?; o bien, para ser más específicos, ¿cómo puede determinarse si la proposición es verdadera para todos los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$?

En ocasiones, se contesta a esta pregunta, usando un método especial de razonamiento llamado *método de la inducción matemática* (inducción completa) y basado en el principio siguiente:

Una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las condiciones siguientes:

Condición 1. La proposición se cumple para $n = 1$.

Condición 2. La veracidad de la proposición para cualquier número natural $n = k$ implica su veracidad para el número natural siguiente $n = k + 1$.

Demostración. Se desea demostrar que si se cumplen las condiciones 1 y 2, entonces la proposición debe ser verdadera para todo número natural n. Se da una demostración indirecta: si no fuera verdadera para todo número natural, habría un número natural, llamémosle m, el menor de todos para los cuales la proposición es falsa. Por la condición 1, $m \neq 1$. De donde $m > 1$, de manera que $m - 1$ es un número natural. Recordando que m es el menor número natural para el cual la proposición es falsa, se ve que la proposición es verdadera para $m - 1$ pero falsa para el número natural siguiente $(m - 1) + 1 = m$. Pero esto contradice la condición 2. Por lo tanto, la proposición debe ser verdadera para todo número natural.

Observación. En nuestra demostración del principio de la inducción matemática, se aplicó la propiedad de los números naturales de que todo conjunto de números naturales contiene un número menor. Se demuestra fácilmente que esta propiedad puede deducirse a su

[1] Demostrado posteriormente en el problema 30, página 32.

vez, del principio de la inducción matemática. De aquí que las dos proposiciones son equivalentes: cualquiera puede tomarse como un *axioma* que define la sucesión de los números naturales y, entonces, la otra proposición es un teorema.

4. DEMOSTRACION POR INDUCCION MATEMATICA

Una demostración por inducción matemática necesariamente consta de dos partes, es decir, demuestra que la proposición satisface las dos condiciones independientes dadas en la sección 3.

Ejemplo 5. Hallar la suma (ver ejemplo 1)

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Solución. Se sabe que

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \frac{3}{4}, \quad S_4 = \frac{4}{5}.$$

En esta ocasión, no se repetirá el razonamiento erróneo, usado en el ejemplo 1, y no saltaremos a la conclusión de que para todos los números naturales n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

En lugar de ello, seremos cautos y sólo diremos que los resultados para S_1, S_2, S_3, y S_4 conducen a la *hipótesis* de que

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

se cumple para todos los números naturales n. Para probar esta hipótesis se aplicará el método de la inducción matemática.

Condición 1. La hipótesis es verdadera para $n = 1$, tal y como se vio anteriormente.

Condición 2. Supóngase que la hipótesis es verdadera para $n = k$; esto es, que

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

donde k es cualquier número natural. Probemos que, a consecuencia, la hipótesis también debe cumplirse para $n = k + 1$, es decir, que

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Pero

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

y, substituyendo el valor supuesto para S_k, se tiene

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

De donde se satisfacen ambas condiciones. De aquí que, a base del principio de la inducción matemática, ahora, puédese afirmar que, para *todo número natural n,*

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Primera observación. Cabe notar que una demostración por inducción matemática debe necesariamente comprobar tanto la condición 1 como la condición 2. Ya se han visto (ejemplo 2) los resultados erróneos que se pueden obtener cuando se pasa por alto la condición 2. El ejemplo siguiente demuestra que tampoco puede pasarse por alto la condición 1.

EJEMPLO 6. "Teorema": *Todo número natural es igual al número que le sigue.*

"Demostración": Suponiendo que

$$k = k + 1, \tag{1}$$

probemos que

$$k + 1 = k + 2. \tag{2}$$

En efecto, sumando 1 a ambos miembros de la igualdad (1) se obtiene la igualdad (2). Por lo tanto, si la proposición del "teorema" es verdadera para $n = k$, también es verdadera para $n = k + 1$; entonces, se ha "probado" el "teorema".

"Corolario": Todos los números naturales son mutuamente iguales.

¿En dónde se ha cometido el error? El error consiste en considerar sólo la condición 2 y no la condición 1. En la aplicación del principio de la inducción matemática, es indispensable probar que se cumple la condición 1 y, en este caso, la condición 1 no se satisface.

Cada una de las condiciones 1 y 2 tiene su propio significado especial. La condición 1, por decirlo así, proporciona la base para la inducción; la condición 2 proporciona la justificación para generalizar a partir de esta base, o sea, la justificación para pasar de un caso especial hacia el siguiente, de n hacia $n + 1$. Si no se satisface la condición 1, entonces no existe base para aplicar el método de la inducción matemática —aun si se satisface la condición 2 (ver el ejemplo 6). Por otra parte, cuando sólo se satisface la primera condición y no la segunda (ver las soluciones de los ejemplos 1 y 2), aunque se proporcione una base para la inducción, no existe justificación para hacer la generalización.

Segunda observación. Los ejemplos anteriores representan casos muy simples de la aplicación del método de la inducción matemática. En casos más complicados, según sea la proposición, hay que modificar el enunciado de las dos condiciones:

a) En ocasiones, para probar que la proposición es verdadera para $n = k + 1$, se requiere saber que la proposición es verdadera para $n = k$ y $n = k - 1$; es decir, los dos números que preceden a $k + 1$. En tales casos, en lugar de la condición 1 se necesitaría probar la aseveración para dos valores consecutivos de n (ver capítulo 2, problema 18).

b) A veces se desea probar una proposición para todos los valores de n mayores que o iguales a algún entero m. En tales casos, se verifica en la primera parte de la demostración que la proposición es verdadera para $n = m$ y, si es necesario, para determinados valores mayores que n (ver capítulo 2, problema 24). Por ejemplo, con frecuencia se encuentran proposiciones que deben probarse para todos los valores no negativos de n (esto es, para $n \geq 0$). En tales casos, en la primera parte de la demostración, se demuestra que la proposición es verdadera para $n = 0$; en la segunda parte se procede en la forma usual.

5. LA INDUCCION MATEMATICA USADA PARA DESCUBRIR CONJETURAS DEFECTUOSAS

Al concluir este capítulo, se examinará de nuevo el ejemplo 1 para aclarar un punto esencial referente al método de la inducción matemática.

Cuando se consideró la suma

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

para varios valores de n, se encontró que

$$S_1 = \frac{1}{2},\quad S_2 = \frac{2}{3},\quad S_3 = \frac{3}{4},\quad S_4 = \frac{4}{5}.$$

Esto condujo a la hipótesis de que para cualquier valor de n

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

En el ejemplo 5, se aplicó el método de la inducción matemática para probar esta hipótesis. Tuvimos suerte, pues encontramos que la hipótesis era correcta. Si en lugar de ello, se hubiera dado con una hipótesis incorrecta, su falsedad se hubiera revelado en la segunda parte de la demostración, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7. Se sabe que

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{1}$$

Sin embargo, supóngase que al estudiar S_n, se hubiera establecido la hipótesis

$$S_n = \frac{n+1}{3n+1}. \tag{2}$$

La fórmula (2) es válida para $n = 1$, puesto que $S_1 = \frac{1}{2}$. Suponer que la fórmula (2) se cumple para $n = k$ significaría que

$$S_k = \frac{k+1}{3k+1}.$$

Tratemos de probar que, si la fórmula (2) es verdadera para $n = k$, también sería verdadera para $n = k + 1$, es decir, que

$$S_{k+1} = \frac{k+2}{3k+4}.$$

Pero

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3 + 4k^2 + 8k + 3}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

que no es el resultado esperado. Por lo tanto, la validez de la fórmula para $n = k$ no implica su validez para $n = k + 1$. Se ha descubierto que la fórmula (2) es falsa.

Así, se ve que el método de la inducción matemática permite probar las generalizaciones correctas y descubrir las falsas.

2

Ejemplos y ejercicios

Para aprender a usar el método de la inducción matemática, es preciso resolver muchos problemas. Este capítulo contiene 52 problemas. En 22 de ellos, las soluciones detalladas se dan en el texto. Las soluciones de los 30 restantes, que debe resolver el lector, se dan al final de este estudio.

6. EJEMPLOS ELEMENTALES Y EJERCICIOS DEL ALGEBRA Y LA GEOMETRIA

PROBLEMA 1. Escribamos la sucesión de los números impares en orden de magnitud: 1, 3, 5, 7, ... Designemos el primero por u_1, el segundo por u_2, el tercero por u_3, etc.; así, se establece:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = 7, \quad \ldots .$$

Ahora vamos a plantear el problema de hallar una fórmula que exprese el número impar u_n en términos de su índice n.

SOLUCIÓN. El primer número impar u_1 puede escribirse en la forma

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1\,; \tag{1}$$

el segundo número impar u_2 puede escribirse en la forma

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1; \tag{2}$$

el tercer número impar u_3 puede escribirse en la forma

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1. \tag{3}$$

Un examen cuidadoso de las igualdades (1), (2) y (3) conduce a la hipótesis de que cualquier número impar puede obtenerse multiplicando su índice por 2 y restando 1; es decir que para cualquier número impar u_n,

$$u_n = 2_n - 1 \tag{4}$$

Probemos que la fórmula (4) es válida generalmente.

Condición 1. La igualdad (1) muestra que la fórmula (4) se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que la fórmula (4) se cumple para $n = k$; es decir, que el k-ésimo número impar está dado por

$$u_k = 2k - 1.$$

Demostremos que, con esta suposición, la fórmula (4) también se cumple para el $(k + 1)$-ésimo número impar, es decir, que el $(k + 1)$-ésimo número impar debe estar dado por

$$u_{k+1} = 2(k + 1) - 1 \text{ ó, en forma equivalente, } u_{k+1} = 2k + 1.$$

Para obtener el $(k + 1)$-ésimo número impar, sólo tiene que sumarse 2 al k-ésimo número impar; así, $u_{k+1} = u_k + 2$. Por hipótesis, $u_k = 2k - 1$. En consecuencia,

$$u_{k+1} = (2k - 1) + 2 = 2k + 1.$$

Resultado. $u_n = 2n - 1$.

PROBLEMA 2. Calcular la suma de los primeros n números impares.

SOLUCIÓN. Denotemos la suma requerida por S_n. Así,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Los problemas de este tipo se pueden resolver usando una fórmula probada. Pero nos interesa resolver el problema sin recurrir a tal fórmula y aplicando el método de la inducción matemática. Para hacerlo, es necesario establecer primero una hipótesis, es decir, tratar simplemente de adivinar la solución.

Asignemos a n los valores sucesivos 1, 2, 3, ... hasta contar con información suficiente para formular una hipótesis plausible. A continuación, debe probarse esta hipótesis con el método de la inducción matemática. Se encuentra que

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 9, \quad S_4 = 16, \quad S_5 = 25, \quad S_6 = 36.$$

Ahora todo depende del poder de observación del estudiante —de su habilidad para conjeturar una relación general a partir de los resultados particulares. En los casos anteriores, se nota inmediatamente que

$$S_1 = 1^2, \quad S_2 = 2^2, \quad S_3 = 3^2, \quad S_4 = 4^2.$$

Entonces es justo suponer que, en general,

$$S_n = n^2.$$

Probemos esta hipótesis.

Condición 1. Para $n = 1$ la suma consiste de un solo término, a saber, el número 1. Para $n = 1$, el valor de la expresión n^2 también es 1. De aquí que la hipótesis se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Supóngase que la hipótesis se cumple para $n = k$ o sea que $S_k = k^2$. Probemos que, con esta suposición, la hipótesis también debe cumplirse para $n = k + 1$, es decir, que

$$S_{k+1} = (k + 1)^2.$$

En efecto, si en el problema 1, $u_{k+1} = 2k + 1$, entonces:

$$S_{k+1} = S_k + (2k + 1).$$

Pero $S_k = k^2$, y de aquí que

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Resultado. $S_n = n^2$.

PROBLEMA 3. Hallar el término general de la sucesión de números u_n si $u_1 = 1$ y, si para todo número natural $k > 1$, se cumple la relación $u_k = u_{k-1} + 3$.

Sugerencia. $u_1 = 3 \cdot 1 - 2$; $u_2 = 3 \cdot 2 - 2$.

PROBLEMA 4. Hallar la suma.

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Sugerencia. 1) $S_1 = 2 - 1$; $S_2 = 2^2 - 1$; ó 2) considérese $2S_n - S_n$.

PROBLEMA 5. Probar que la suma S_n de los n primeros números naturales es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN. Este problema difiere de los precedentes en que no es necesario buscar una hipótesis; la hipótesis se da. Simplemente debe probarse que es correcta.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n.$$

Condición 1. La hipótesis se cumple para $n = 1$.

Condición 2. Suponiendo que

$$S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

demostremos que

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Esto completa la demostración.

PROBLEMA 6. Probar que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

PROBLEMA 7. Probar que

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN. *Condición 1.* Es obvio que la hipótesis se cumple para $n = 1$, puesto que $(-1)^0 = 1$.

Condición 2. Suponiendo que

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k-1)}{2},$$

probemos que

$$S_{k+1} = 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto,

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2$$
$$= (-1)^k\left[(k+1) - \frac{k}{2}\right](k+1) = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

PROBLEMA 8. Probar que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

PROBLEMA 9. Probar que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

PROBLEMA 10. Probar que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1).$$

PROBLEMA 11. Probar que

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

PROBLEMA 12. Probar que

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

PROBLEMA 13. Probar que

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

PROBLEMA 14. Probar que

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

PROBLEMA 15. Probar que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

PROBLEMA 16. Probar que

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

PROBLEMA 17. Probar que

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}.$$

PROBLEMA 18. Probar que para todos los enteros no negativos n (es decir, para $n \geq 0$)

$$v_n = 2^n + 1,$$

dado que (i) $v_0 = 2$, $v_1 = 3$ y (ii) para todo número natural k, se cumple la relación $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$.

SOLUCIÓN. De lo que se da, resulta evidente que la proposición se cumple para $n = 0$ y para $n = 1$. (Con respecto a ello, ver la segunda observación de la sección 4 en el capítulo 1.) Supóngase que

$$v_{k-1} = 2^{k-1} + 1; \quad v_k = 2^k + 1.$$

Entonces se concluye que

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

PROBLEMA 19. Probar que

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},$$

si

$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, \quad u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \qquad (\alpha \neq \beta),$$

y si para todo número natural $k > 2$, se cumple la siguiente relación:

$$u_k = (\alpha + \beta) u_{k-1} = \alpha\beta u_{k-2}.$$

PROBLEMA 20. El producto $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ se designa mediante el símbolo $n!$ (léase "factorial de n"). Nótese que $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$. Hallar una expresión para la suma

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$$

SOLUCIÓN. $S_1 = 1\cdot 1! = 1$,

$$\begin{aligned} S_2 &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5,\\ S_3 &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23,\\ S_4 &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! = 119 \end{aligned}$$

Examinando estas sumas, se observa que

$$S_1 = 2! - 1, \quad S_2 = 3! - 1, \quad S_3 = 4! - 1, \quad S_4 = 5! - 1.$$

Esto conduce a la hipótesis

$$S_n = (n+1)! - 1.$$

Verifiquemos esta hipótesis.

Condición 1. La hipótesis se cumple para $n = 1$, ya que

$$S_1 = 1\cdot 1! = 2! - 1.$$

Condición 2. Suponiendo que

$$S_k = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1,$$

demostremos que

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)!\\ &= (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)\cdot(k+1)! \\ &= [(k+1)! - 1] + (k+1)\cdot(k+1)! \\ &= (k+1)![1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Problema 21. Probar que para todos los enteros no negativos n, se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$
$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \qquad (x \neq 1, x \neq -1),$$

(En relación con este problema, ver la segunda observación de la sección 4 en el capítulo 1.)

Problema 22. Dados los números α y β, con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha + \beta \neq 1$, sean

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = a, \quad A_2 = m - \frac{a}{m-1},$$
$$A_3 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}, \quad A_4 = m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m - \cfrac{a}{m-1}}}, \text{ etc.,}$$

esto es, para todo $k > 1$,

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k}.$$

Probar que

$$A_n = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}. \qquad (1)$$

Solución. *Condición 1.* Primero, demostremos que la fórmula (1) se cumple para $n = 2$. Por hipótesis,

$$A_2 = m - \frac{a}{m-1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta) - 1}$$
$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}$$

De acuerdo con la fórmula (1),

$$A_2 = \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta)}.$$

Se observa que $\alpha - \beta$ es un factor tanto del numerador como del denominador de la fracción anterior; entonces se puede reducir la fracción para obtener

$$A_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - 1}.$$

Condición 2. Suponiendo que la fórmula (1) se cumple para $n = k$, probemos que también debe ser verdadera para $n = k + 1$. Es decir, si

$$A_k = \frac{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}{(\alpha^k - \beta^k) - (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})}, \qquad (2)$$

entonces

$$A_{k+1} = \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}.$$

En efecto,

$$A_{k+1} = m - \frac{a}{A_k} \quad \text{ó} \quad A_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta}{A_k}.$$

Aplicando la igualdad (2), se obtiene

$$A_{k+1} = (\alpha + \beta) - \frac{\alpha\beta[(\alpha^k - \beta^k) - (\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})]}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}$$
$$= \frac{(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) - (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1})}{(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - (\alpha^k - \beta^k)}.$$

Esto completa la demostración.

Problema 23. Simplificar el polinomio

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

Respuesta. $(-1)^n \dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$. El lector debe hacer la demostración.

Problema 24. Probar que cualquier número entero de rublos mayor que 7 puede pagarse con billetes de 3 rublos y 5 rublos, sin requerir vuelto.

Solución. La proposición se cumple para 8 rublos. Supóngase que la proposición se cumple para algún número natural $k \geq 8$ de rublos.

Hay dos posibilidades: 1) Los k rublos se pueden pagar sólo con billetes de 3 rublos ó 2) Entre los billetes, hay por lo menos uno de 5 rublos.

En el primer caso, el número de billetes de 3 rublos no puede ser menor que tres, para $k \geq 8$. De aquí que, para pagar $k + 1$ rublos, tres billetes de 3 rublos pueden reemplazarse por dos billetes de 5 rublos.

En el segundo caso, un billete de 5 rublos puede remplazarse por dos billetes de 3 rublos para pagar $k + 1$ rublos.

Problema 25. Probar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos cualesquiera es divisible entre 9.

Solución. La suma $1^3 + 2^3 + 3^3$ es divisible por 9. De aquí que, la proposición se cumple si el primero de los tres números naturales consecutivos es 1.

Supóngase que la suma $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$ es divisible entre 9, siendo k algún número natural. Entonces, la suma

$$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3$$
$$= [k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$$

es la suma de dos expresiones, cada una de las cuales es divisible por 9; de aquí que su suma también es divisible por 9.

Problema 26. Probar que para todo número entero no negativo n, la suma

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible por 133.

Problema 27. De entre los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$ selecciónense al azar $n + 1$ números. Probar que entre los números seleccionados existen por lo menos dos números tales que uno de ellos es divisible por el otro.

Solución.[1] Supóngase que de entre los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, donde $n \geq 2$, se han encontrado $n + 1$ números tales que ninguno

[1] Esta solución fue propuesta por un estudiante en el Instituto Pedagógico Herzen, de Leningrado.

de ellos es divisible por cualquier otro. Denotemos este conjunto de $n + 1$ números por M_{n+1}. Probemos que, en este caso, sería posible seleccionar de entre los $2n - 2$ números $1, 2, \ldots, 2n - 2$, un conjunto conteniendo n números tales que ninguno de los n números sea divisible por cualquier otro.

Hay cuatro posibilidades:

1. M_{n+1} no contiene al número $2n - 1$ ni al número $2n$.
2. M_{n+1} contiene a $2n - 1$ pero no a $2n$.
3. M_{n+1} contiene a $2n$ pero no a $2n - 1$.
4. M_{n+1} contiene tanto a $2n - 1$ como a $2n$.

Caso 1. Quitemos un número arbitrario del conjunto M_{n+1}. Entonces quedan n números ninguno de los cuales es mayor que $2n - 2$. Ninguno de éstos es divisible por cualquier otro.

Caso 2. Quitemos el número $2n - 1$ del conjunto M_{n+1}. Nuevamente entre los n números restantes, ninguno es mayor que $2n - 2$ y ninguno de ellos es divisible por otro cualquiera.

Caso 3. Quitemos el número $2n$ del conjunto M_{n+1}; el resultado es el mismo que el de los casos 1 y 2.

Caso 4. Antes que todo, se observa que el número n no puede pertenecer al conjunto M_{n+1}; en caso contrario, el conjunto M_{n+1} contendría a los dos números n y $2n$; y $2n$ es divisible entre n.

Ahora quitemos los dos números $2n - 1$ y $2n$ del conjunto M_{n+1}. Denotemos por M_{n-1} al conjunto de los $n - 1$ número que quedan. A continuación se agrega el número n al conjunto M_{n-1}, obteniendo de este modo un conjunto de n números, ninguno de los cuales es mayor que $2n - 2$. Falta demostrar que de estos n números, ninguno sería divisible por cualquier otro.

Como el conjunto M_{n+1} no contuvo dos números de los cuales uno fuera divisible por el otro, el conjunto M_{n-1} tampoco contiene tales números. Por lo tanto, sólo se debe demostrar que no puede haber dos números tales, aun cuando se agrega el número n al conjunto M_{n-1}.

Para hacerlo, basta demostrar 1) que ningún número en M_{n-1} es divisible por n y 2) que n no es divisible por número alguno en M_{n-1}.

La primera proposición se deduce del hecho de que de los números en M_{n-1}, ninguno es mayor que $2n - 2$. La segunda se deduce del hecho de que $2n$ no es divisible por número alguno en M_{n-1}. Así se ha demostrado que si la proposición es falsa para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, también debe ser falsa para los $2(n - 1)$ números 1,

$2, \ldots, 2n-2$. De aquí que, si la proposición es verdadera para los $2(n-1)$ números $1, 2, \ldots, 2n-2$, también debe ser verdadera para los $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$.

La proposición es verdadera para los dos números 1 y 2; de aquí que es verdadera para todos los conjuntos de $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, donde n es un número natural.

Observación. El problema tiene la siguiente solución sencilla en la que no se aplica el método de la inducción matemática. Selecciónense $n+1$ números cualesquiera del conjunto de $2n$ números $1, 2, \ldots, 2n$, y desígnese este conjunto por M_{n+1}. Divídase cada uno de los números pares en M_{n+1} por una potencia de 2, de modo que el cociente será un número impar. De estos cocientes y los números impares en M_{n+1}, formemos el conjunto $\overline{M}_{n+1}$. $\overline{M}_{n+1}$ contiene $n+1$ números impares, cada uno menor que $2n$. Como sólo existen n números impares positivos menores que $2n$, entonces, al menos dos de los cocientes en el conjunto $\overline{M}_{n+1}$ deben ser el mismo número; denotemos este número por k. Por tanto, en el conjunto M_{n+1} debe haber por lo menos dos números de la forma $2^s k$ y $2^t k$. Es obvio que uno de estos dos números será divisible por el otro.

Problema 28. Probar que n rectas diferentes que se encuentran en un plano y pasan por un punto común, dividen el plano en $2n$ partes.

Problema 29. Probar que n rectas que se encuentran en un plano dividen el plano en regiones que pueden colorearse blanco y negro, en tal forma que dos regiones vecinas cualesquiera (o sea, regiones cuya frontera es un segmento rectilíneo común) tienen colores diferentes.

7. EJEMPLOS Y EJERCICIOS AVANZADOS

Problema 30. Probar que n planos que pasan por un punto común, sin que tres cualesquiera de ellos se intersequen en la misma recta, dividen al espacio en $A_n = n(n-1)+2$ partes.

Solución. 1) Un plano divide al espacio en dos partes, y $A_1 = 2$. De aquí que la proposición se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que la proposición se cumple para $n = k$, es decir, que k planos dividen al espacio en $k(k-1)+2$ partes. Probemos que entonces $k+1$ planos deben dividir al espacio en $k(k+1)+2$ partes.

Sea P el $(k+1)$-ésimo plano. P se interseca con cada uno de los otros planos en una recta y todas estas k rectas se intersecan en el

punto que es común a todos los planos. Aplicando el resultado del problema 28, se ve que el plano P queda dividido en $2k$ partes, cada una de las cuales está encerrada por un ángulo plano con su vértice en el punto común de intersección. Los primeros k planos dividen el espacio en varios ángulos poliedros. El plano P divide algunos de estos ángulos poliedros en 2 partes. La cara común a esas dos partes es aquella porción del plano que está limitada por las dos semirrectas a lo largo de las cuales P se interseca con las caras del ángulo poliedro dado, es decir, uno de los $2k$ ángulos planos en los cuales se divide el plano P. Esto significa que el número de ángulos poliedros cortados en dos partes por el plano P no puede exceder a $2k$.

Por otra parte, cada una de las dos partes, en las cuales se divide el plano P como resultado de su intersección con el primer plano, divide así el ángulo poliedro formado por los primeros k planos en dos partes. Esto significa que el número de ángulos poliedros cortados en dos por el plano P no puede ser menor que $2k$.

Entonces, el plano P divide en 2 partes exactamente a $2k$ de los ángulos poliedros formados por los primeros k planos. En consecuencia, si k planos dividen el espacio en $k(k-1)+2$ partes, entonces $k+1$ planos dividen el espacio en

$$[k(k-1)+2] + 2k = k(k+1)+2$$

partes. De donde se ha probado la proposición.

Problema 31. Probar la identidad

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Solución. 1) La fórmula se cumple para $n = 0$, ya que

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

2) Supóngase que la fórmula se cumple para $n = k$; es decir, que

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 2^k\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Entonces debe demostrarse que la fórmula también se cumple para $n = k+1$. En efecto,

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cdots\cos 2^k\alpha\cos 2^{k+1}\alpha$$
$$=\frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen} 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\operatorname{sen}\alpha}.$$

Problema 32. Dado que $A_1=\cos\theta$, $A_2=\cos 2\theta$ y que, para todo número natural $k>2$,

$$A_k = 2\,A_{k-1}\cos\theta - A_{k-2};$$

probar que

$$A_n=\cos n\theta.$$

Solución. 1) La fórmula se cumple para $n=1$ y $n=2$.
2) Supóngase que

$$A_{k-2}=\cos(k-2)\theta,\quad A_{k-1}=\cos(k-1)\theta.$$

Entonces

$$A_k = 2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta=\cos k\theta.^1$$

Problema 33. Probar que

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx=\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}.$$

Solución. 1) La fórmula se cumple para $n=1$.
2) Supóngase que

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} kx=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}.$$

Entonces $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} kx+\operatorname{sen}(k+1)x$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}+\operatorname{sen}(k+1)x$$

[1] Aquí se aplica la identidad $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, haciendo $\alpha=(k-1)\theta$ y $\beta=\theta$.

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{2}+2\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{k+1}{2}x,$$

Puesto que $2\cos\frac{k+1}{2}x\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\operatorname{sen}\frac{k+2}{2}x-\operatorname{sen}\frac{kx}{2}.$

Problema 34. Probar que

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Problema 35. Probar que

$$\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} 2x+3\operatorname{sen} 3x+\cdots+n\operatorname{sen} nx$$
$$=\frac{(n+1)\operatorname{sen} nx-n\operatorname{sen}(n+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

Problema 36. Probar que

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$$
$$=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

Problema 37. Probar que

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x\qquad (x\neq m\pi)$$

Problema 38. Probar que

$$\operatorname{arc\,cot} 3+\operatorname{arc\,cot} 5+\cdots+\operatorname{arc\,cot}(2n+1)$$
$$=\operatorname{arc\,tan} 2+\operatorname{arc\,tan}\frac{3}{2}+\cdots\operatorname{arc\,tan}\frac{n+1}{n}-n\operatorname{arc\,tan} 1.$$

PROBLEMA 39. Probar que

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right).$$

SOLUCIÓN. 1) La igualdad se cumple para $n = 1$, puesto que

$$1+i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Supóngase que

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right).$$

Entonces

$$(1+i)^{k+1} = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4}\right)\cdot 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{\frac{k+1}{2}}\left(\cos\frac{(k+1)\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

PROBLEMA 40. Probar que

$$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right).$$

PROBLEMA 41. Probar el teorema siguiente: Si la aplicación de un número finito de operaciones racionales (es decir, adición, substracción, multiplicación y división) a los números complejos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ conduce al número u, entonces la aplicación de las mismas operaciones en el mismo orden de sucesión a los complejos conjugados $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ conduce al número $\bar{u}$, que es el conjugado de u.

SOLUCIÓN. Primero demostremos que el teorema se cumple para cada una de las cuatro operaciones aplicadas simplemente a los dos números complejos. Sean

$$x_1 = a + bi, \qquad x_2 = c + di.$$

Entonces $\quad x_1 + x_2 = (a+c) + (b+d)i = u;$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a+c) - (b+d)i = \bar{u}$$

El teorema puede verificarse exactamente en la misma forma para la substracción, multiplicación y división.

Ahora, sea dada una expresión racional que contiene a los números complejos $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Como es bien sabido, para simplificar una expresión de este tipo basta aplicar sucesivamente las cuatro operaciones racionales sobre dos complejos, y efectuar dichas operaciones en determinado orden.

Por ejemplo, sea

$$u = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3}.$$

Para calcular u, se pueden llevar a cabo las operaciones siguientes en el orden indicado:

1) $x_1x_2 = u_1,$	4) $u_3 - x_3 = u_4,$
2) $x_3x_4 = u_2,$	5) $u_1 + u_2 = u_5,$
3) $x_1 + x_2 = u_3,$	6) $\frac{u_5}{u_4} = u.$

Supóngase que el teorema se cumple para todas las expresiones racionales cuya simplificación requiere no más de k aplicaciones de las "operaciones". Demostremos que, en este caso, el teorema también debe cumplirse para expresiones que requieren la aplicación de no más de $k + 1$ aplicaciones de las "operaciones". Si los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se remplazan por sus complejos conjugados, los números u_i y u_j se remplazan por sus complejos conjugados: $\bar{u}_i$ y $\bar{u}_j$, y la $(k+1)$-ésima "operación" aplicada a $\bar{u}_i$ y $\bar{u}_j$ da el número u, el complejo conjugado de u.

PROBLEMA 42. Probar que para todo número natural n,

$$(\cos x + i\operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i\operatorname{sen} nx.$$

PROBLEMA 43. Probar que para todos los números naturales $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

SOLUCIÓN. Designemos por S_n a la expresión del primer miembro de la desigualdad.

1) $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, de modo que la desigualdad se cumple para $n = 2$.

2) Supóngase que $S_k > \frac{13}{24}$ para algún número k. Probemos que en este caso también debe tenerse $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Se tiene

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$$
$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Restando S_k de S_{k+1}, se obtiene

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

es decir,

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

Para cualquier número natural k, la expresión del segundo miembro de la última igualdad es positiva. De aquí que, $S_{k+1} > S_k$. Pero $S_k > \frac{13}{24}$; de aquí que, también, $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

PROBLEMA 44. Hallar el error en la siguiente "demostración".

PROPOSICIÓN. Para todo número natural n se cumple la siguiente desigualdad:

$$2^n > 2n + 1.$$

Demostración: Supóngase que la desigualdad se cumple para algún número natural $n = k$; esto es, supóngase que

$$2^k > 2k + 1. \quad (1)$$

Probemos que esto también se cumple para $n = k + 1$; es decir,

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1. \quad (2)$$

Para todo número natural k, 2^k no es menor que 2. Agreguemos 2^k al primer miembro de la desigualdad (1), y agreguemos 2 al segundo miembro. Esto proporciona la desigualdad

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2,$$

o bien

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1.$$

Esto prueba la desigualdad.

PROBLEMA 45. ¿Para cuáles números naturales se cumple la desigualdad $2^n > 2n + 1$?

PROBLEMA 46. ¿Para cuáles números naturales n se cumple la desigualdad $2^n > n^2$?

SOLUCIÓN.

La desigualdad se cumple para $n = 1$, ya que $2^1 > 1^2$.
La desigualdad no se cumple para $n = 2$, ya que $2^2 = 2^2$.
La desigualdad no se cumple para $n = 3$, ya que $2^3 < 3^2$.
La desigualdad no se cumple para $n = 4$, ya que $2^4 = 4^2$.
La desigualdad se cumple para $n = 5$, ya que $2^5 > 5^2$.
La desigualdad se cumple para $n = 6$, ya que $2^6 > 6^2$.

Aparentemente la desigualdad se cumple para $n = 1$ y para todo $n > 4$. Probemos esto.

1) La desigualdad se cumple para $n = 5$.
2) Supóngase que para algún número natural $k > 4$,

$$2^k > k^2. \quad (1)$$

Probemos que

$$2^{k+1} > (k+1)^2 \quad (2)$$

Se sabe que $2^k > 2k + 1$ para $k > 4$ (problema 45). De aquí que, sumando 2^k al primer miembro y $2k + 1$ al segundo miembro de la desigualdad (1) se obtiene la desigualdad (2).

Resultado. $2^n > n^2$ para $n = 1$ y para todo $n > 4$.

PROBLEMA 47. Probar que

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha,$$

donde $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, y n es un número natural mayor que 1.

SOLUCIÓN. 1) La desigualdad se cumple para $n = 2$, puesto que $\alpha^2 > 0$.

2) Supóngase que la desigualdad cumple para algún número natural $n = k$; es decir,

$$(1 + \alpha)^k > 1 + k\alpha. \tag{1}$$

Probemos que aquí también se cumple la desigualdad para $n = k + 1$; es decir,

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha. \tag{2}$$

De acuerdo con la hipótesis original, $1 + \alpha > 0$; por tanto la multiplicación de ambos miembros de la desigualdad (1) por $1 + \alpha$ proporciona la desigualdad válida

$$(1 + \alpha)^{k+1} > (1 + k\alpha)(1 + \alpha), \tag{3}$$

que puede escribirse en la forma

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2.$$

Eliminando el término positivo $k\alpha^2$ del segundo miembro de la última desigualdad, se obtiene la desigualdad (2).

PROBLEMA 48. Probar que para todo número natural $n > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

PROBLEMA 49. Probar que para todo número natural $n > 1$,

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

PROBLEMA 50. Probar que

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n, \tag{1}$$

donde $a + b > 0$, $a \neq b$ y n es un número natural mayor que 1.

SOLUCIÓN. 1) Para $n = 2$, la desigualdad (1) toma la forma

$$2(a^2 + b^2) > (a + b)^2. \tag{2}$$

Como $a \neq b$, se tiene la desigualdad

$$(a - b)^2 > 0. \tag{3}$$

Sumando $(a + b)^2$ a cada miembro de la desigualdad (3) se obtiene la desigualdad (2). Esto prueba que la desigualdad (1) se cumple para $n = 2$.

2) Supóngase que la desigualdad (1) se cumple para algún número natural $n = k$; esto es,

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a + b)^k. \tag{4}$$

Probemos entonces que la desigualdad (1) debe cumplirse para $n = k + 1$; es decir,

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1}. \tag{5}$$

Multipliquemos ambos miembros de la desigualdad (4) por $a + b$. Puesto que por la hipótesis original, $a + b > 0$, se obtiene la desigualdad siguiente:

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b) > (a + b)^{k+1}. \tag{6}$$

Para probar la desigualdad (5) es suficiente demostrar que

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a + b), \tag{7}$$

lo cual es equivalente a

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k. \tag{8}$$

La desigualdad (8) puede escribirse en la forma

$$(a^k - b^k)(a - b) > 0. \tag{9}$$

Supóngase que $a > b$. Entonces, de la hipótesis de que $a > 0$, se concluye que $a > |b|$; por lo tanto, $a^k > b^k$. De donde el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números positivos. Si $a < b$, entonces, por un razonamiento semejante, se ve que $a^k < b^k$. En este caso, el primer miembro de la desigualdad (9) es el producto de dos números negativos. En todo caso, se cumple la desigualdad (9).

Esto prueba que si la desigualdad (1) se cumple para $n = k$, también debe cumplirse para $n = k + 1$.

PROBLEMA 51. Probar que para todo $x > 0$ y para todo número natural n, se cumple la desigualdad siguiente:

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. 1*a*) Para $n = 1$, la desigualdad (1) toma la forma

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \qquad (2)$$

La desigualdad (2) se deduce de la desigualdad obvia

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

1*b*) Para $n = 2$, la desigualdad (1) toma la forma

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3. \qquad (3)$$

Como la desigualdad (2) se cumple para todo $x > 0$, también se cumple si se remplaza x por x^2, es decir,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2.$$

Sumando 1 a ambos miembros de la última desigualdad, se obtiene la desigualdad (3).

2) Supóngase que se cumple la desigualdad (1) para algún número natural $n = k$; es decir,

$$x^k + x^{k-2} + \ldots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1. \qquad (4)$$

Demostremos que, entonces, también debe cumplirse la desigualdad (1) para $n = k + 2$; es decir,

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3. \qquad (5)$$

Remplazando x por x^{k+2} en la desigualdad (2), se obtiene

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2. \qquad (6)$$

Sumando término a término las desigualdades (4) y (6), se obtiene la desigualdad (5).

Hagamos un resumen de los resultados. En 1*a*) y 1*b*) se probó que la desigualdad (1) se cumple para $n = 1$ y $n = 2$. En 2) se probó que la validez de la desigualdad (1) para $n = k + 2$ se deduce de su validez para $n = k$. En otras palabras, 2) nos permite pasar de $n = k$ hacia $n = k + 2$. Los resultados de 1*a*) y 2) permiten aseverar que la desigualdad (1) se cumple para todos los valores *impares* de n. De modo semejante, los resultados de 1*b*) y 2) permiten asegurar que la desigualdad se cumple para todos los valores *pares* de n. De donde puede afirmarse que la desigualdad (1) se cumple para todos los números naturales n.

PROBLEMA 52. Probar el teorema siguiente: La media geométrica de un número finito de números positivos no es mayor que su media aritmética; es decir, para cualesquiera números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. 1) Para $n = 2$, la desigualdad (1) toma la forma

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}. \qquad (2)$$

Para números arbitrarios a_1 y a_2, se cumple la desigualdad siguiente:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

De esta desigualdad es fácil obtener la desigualdad (2).

La desigualdad (2) tiene una interpretación geométrica sencilla. Sobre una recta dada, seleccionemos un punto A y determinemos los segmentos AC y CB que tengan las longitudes a_1 y a_2, respectivamente. Ahora construyamos un círculo que tenga el segmento rectilíneo AB como diámetro. Así, la longitud de un radio del círculo será $\frac{a_1 + a_2}{2}$. En el punto C, levantemos una perpendicular al segmento rectilíneo AB y sea D el punto en el cual esta perpendicular D interseca con la circunferencia. Entonces la longitud del segmento CD es $\sqrt{a_1 a_2}$.

$2a$) Supóngase que la desigualdad (1) se cumple para $n = k$ y pruébese que entonces también se cumple para $n = 2k$.

$$\begin{aligned}\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}} &= \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} \\ &\leq \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}}{2} \\ &\leq \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \dfrac{a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}}{k}}{2} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_{2k}}{2k}.\end{aligned}$$

Puesto que la desigualdad (1) se ha verificado para $n = 2$, se puede afirmar que también se cumple para $n = 4, 8, 16$ etcétera; es decir, para todo $n = 2^s$, donde s es un número natural.

$2b$) Para probar que la desigualdad (1) se cumple para todos los números naturales n, demostremos que de su validez para $n = k$ se deduce su validez para $n = k - 1$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ números positivos arbitrarios y λ otro número positivo hasta ahora indeterminado. Entonces,

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}\lambda} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \lambda}{k}$$

Selecciónese λ en tal forma que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

es decir, póngase

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

Entonces se obtiene

$$\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})}{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

o bien

$$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

Ahora sea m un número natural arbitrario. Si $m = 2^s$ para algún número natural s, entonces, de acuerdo con $2a$), la desigualdad (1) se cumple. Por otra parte, si $m \neq 2^s$, se puede hallar un número natural s tal que $m < 2^s$. Entonces, en virtud de $2a$) y $2b$), se puede aseverar que la desigualdad también se cumple para $n = m$. (Esta brillante demostración fue dada por el matemático francés A. Cauchy, 1789-1857.)

3

Demostraciones de algunos teoremas del álgebra

8. POLINOMIOS Y PROGRESIONES

TEOREMA 1. *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más la suma de todos los posibles dobles productos de parejas de términos diferentes; o, simbólicamente,*

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \\ = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n).\end{aligned} \qquad (1)$$

Demostración. Para $n = 2$, la fórmula (1) puede probarse por multiplicación directa.

Supóngase que la fórmula (1) se cumple para $n = k - 1$, es decir,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S,$$

donde S es la suma de todos los productos posibles de dos cualesquiera de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Probemos que

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 \\ = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2S_1,\end{aligned}$$

donde S_1 es la suma de todos los productos posibles de dos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$, es decir,

$$S_1 = S + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 &= [(a_1 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2 \\ &= (a_1 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\ &= a_1^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2S_1.\end{aligned}$$

TEOREMA 2. *El n-ésimo término a_n de una progresión aritmética está dado por*

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

donde a_1 es el primer término y d la diferencia común.

Demostración. La fórmula (1) se cumple para $n = 1$.

Supóngase que la fórmula (1) se cumple para algún $n = k$, es decir,

$$a_k = a_1 + d(k-1).$$

Entonces

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk;$$

esto es, la fórmula (1) también se cumple para $n = k + 1$.

TEOREMA 3. *El n-ésimo término a_n de una progresión geométrica está dado por*

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{1}$$

donde a_1 es el primer término y q es la razón común.

Demostración. La fórmula (1) se cumple para $n = 1$.

Supóngase que $a_k = a_1 q^{k-1}$.

Entonces

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^k.$$

9. PERMUTACIONES, COMBINACIONES Y EL TEOREMA DEL BINOMIO

TEOREMA 4. *El número P_m de permutaciones de m elementos está dado por*

$$P_m = m!. \tag{1}$$

Demostración. Primero, nótese que $P_1 = 1$, de manera que la fórmula (1) se cumple para $m = 1$.

Supóngase que $P_k = k!$. Probemos que

$$P_{k+1} = (k+1)!.$$

De entre los $k + 1$ elementos dados $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, tómense precisamente los k primeros elementos y considérense todas las permutaciones posibles entre ellos. Por hipótesis, existen $k!$ de esas permutaciones. En cada una de estas permutaciones, introduzcamos el

elemento a_{k+1}, colocándolo sucesivamente antes del primero, antes del segundo, ..., antes del k-ésimo y después del k-ésimo elemento. En esta forma, una sola permutación de k elementos conduce a $k + 1$ permutaciones de $k + 1$ elementos. Por lo tanto, en total se tienen $k!(k + 1) = (k + 1)!$ permutaciones de $k + 1$ elementos.

Falta poner en claro dos puntos:

1) ¿Entre las $(k + 1)!$ permutaciones existen dos cualesquiera que sean la misma?

2) ¿Se han tomado en cuenta todas las permutaciones posibles?

1) Supóngase que entre las $(k + 1)!$ permutaciones existen dos que son la misma. Denotémoslas por p_1 y p_2. Si en la permutación p_1, el elemento a_{k+1} se encuentra en el s-ésimo lugar desde la izquierda, también debe encontrarse en el s-ésimo lugar desde la izquierda de la permutación p_2. Ahora quitemos el elemento a_{k+1} tanto de p_1 como de p_2, obteniendo de este modo dos permutaciones idénticas $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ de k elementos.

Por tanto, para obtener las permutaciones p_1 y p_2, debe introducirse el elemento a_{k+1} en el mismo lugar en cada una de las permutaciones $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$. Pero $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ son la misma permutación; por lo tanto, p_1 y p_2 son la misma permutación, lo cual es contrario a la hipótesis.

2) Supóngase que existe una permutación p de los $k + 1$ elementos que no se ha obtenido. Supóngase que el elemento a_{k+1} se encuentra en el s-ésimo lugar desde la izquierda en la permutación p. Después de eliminar a_{k+1} de p, se obtiene una permutación $\bar{p}$ de los primeros k elementos. Esto significa que para obtener la permutación p es suficiente introducir el elemento a_{k+1} en la permutación $\bar{p}$, en el s-ésimo lugar desde la izquierda.

La permutación $\bar{p}$ debe haber sido una de las $k!$ permutaciones de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, porque se supuso que esta colección de $k!$ permutaciones incluía *todas las permutaciones posibles* de esos k elementos. Es más, al construir las permutaciones de los $k + 1$ elementos se introdujo a_{k+1} en el primero, el segundo, ... y el $(k + 1)$-ésimo lugares desde la izquierda, en cada una de estas $k!$ permutaciones. Por lo tanto, en particular, debe haberse introducido a_{k+1} en el s-ésimo lugar de la permutación $\bar{p}$.

Así, *las permutaciones son todas diferentes entre sí y se han considerado todas las permutaciones posibles de los $k + 1$ elementos.* De aquí que

$$P_{k+1} = (k+1)!.$$

TEOREMA 5. *Dados m elementos, el número de permutaciones de n de esos elementos es*

$$A_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1). \qquad (1)$$

Demostración. Primero, nótese que la fórmula (1) se cumple para $n = 1$, puesto que $A_m^1 = m$.

Supóngase que

$$A_m^k = m(m-1)\cdots(m-k+1),$$

donde $k < m$. Probemos que

$$A_m^{k+1} = m(m-1)\cdots(m-k).$$

Para obtener todas las permutaciones con $k+1$ elementos tomados de los m elementos dados, es suficiente agregar al final de cada una de las permutaciones de k elementos, uno de los $m-k$ elementos restantes. Puede verse fácilmente que *todas* las permutaciones de orden $k+1$ que se obtienen en esta forma *son diferentes de cualquier otra,* y que *se han considerado todas las permutaciones posibles de la clase en cuestión.* De aquí que

$$A_m^{k+1} = A_m^k(m-k) = m(m-1)\cdots(m-k).$$

TEOREMA 6. *Dado un conjunto de m elementos, el número de conjuntos de n elementos ($n \leq m$) que pueden formarse de estos m elementos (o, como se acostumbra decir, el número de combinaciones de m objetos tomados n a la vez) es*

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}. \qquad (1)$$

Demostración. Primero, nótese que $C_m^1 = m$, de manera que la fórmula (1) se cumple para $n = 1$.

Supóngase que

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}.$$

Probemos que

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k(k+1)}$$

Para obtener todos los conjuntos posibles con $k+1$ elementos de un conjunto de m elementos, escríbanse todos los conjuntos con k elementos de entre los m elementos y agréguese a cada uno de ellos, como $(k+1)$-ésimo elemento, uno de los $m-k$ elementos restantes. Es evidente que, en esta forma, se obtienen todos los conjuntos con $k+1$ elementos de entre los m elementos, y que cada uno de ellos se obtiene $k+1$ veces. De hecho, el conjunto que consiste de los elementos $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ se obtiene, agregando el elemento a_1 al conjuntos cuyos elementos son $a_2, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}$, también puede obtenerse el conjunto anterior, agregando el elemento a_2 al conjunto cuyos elementos son $a_1, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}$, etcétera, y, finalmente, agregando el elemento a_{k+1} al conjunto cuyos elementos son $a_1, a_2, \cdots, a_k$. De donde

$$C_m^{k+1} = C_m^k \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k(k+1)}.$$

TEOREMA 7. *Para dos números cualesquiera a y b y para todo número natural n,*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^s a^{n-s}b^s + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n \qquad (1)$$

(teorema del binomio de Newton).

Demostración. Para $n = 1$ la fórmula de $a+b = a+b$; es decir, la fórmula (1) se cumple para $n = 1$.

Supóngase que

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \cdots + b^k.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b)\\ &= (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \cdots + b^k)(a+b)\\ &= a^{k+1} + (1 + C_k^1)a^k b + (C_k^1 + C_k^2)a^{k-1}b^2 + \cdots\\ &\quad + (C_k^s + C_k^{s+1})a^{k-s}b^{s+1} + \cdots + b^{k+1}.\end{aligned}$$

En vista de que $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, se obtiene

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1}b^2 + \cdots + C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1} + \cdots + b^{k+1}.$$

Soluciones a los ejercicios del capítulo 2

PROBLEMA 3. Hipótesis: $u_n = 3n - 2.$

1) La hipótesis se cumple para $n = 1.$

2) Supóngase que $u_k = 3k - 2.$

Entonces $u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 2 + 3 = 3(k + 1) - 2.$

PROBLEMA 4. Hipótesis: $S_n = 2^n - 1.$

1) La hipótesis se cumple para $n = 1.$

2) Supóngase que $S_k = 2^k - 1.$

Entonces $S_{k+1} = S_k + 2^k = 2^{k+1} - 1.$

PROBLEMA 6. 1) La fórmula se cumple para $n = 1.$

2) Supóngase que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}.$

Entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}.$$

PROBLEMA 8. 1) La fórmula se cumple para $n = 1.$

2) Supóngase que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k - 1)^2$

$$= \frac{k(2k - 1)(2k + 1)}{3}.$$

Entonces $1^2 + 3^2 + \cdots + (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2$

$$= \frac{k(2k - 1)(2k + 1)}{3} + (2k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(2k + 1)(2k + 3)}{3}.$$

PROBLEMA 9. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$

Entonces $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

PROBLEMA 10. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$.

Entonces $1 + x + x^2 + \cdots + x^k + x^{k+1} = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1}$

$$= \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}.$$

PROBLEMA 11. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{2}$.

Entonces $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

PROBLEMA 12. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Entonces

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

PROBLEMA 13. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{k}{2k+1}$.

Entonces $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

PROBLEMA 14. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)}$.

Entonces $\dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \dfrac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = (k+1)\,\frac{k(2k+3) + 2(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

PROBLEMA 15. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{k}{3k+1}$

Entonces $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} + \frac{k+1}{3k+4}.$$

PROBLEMA 16. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{k}{4k+1}$.

Entonces $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \dfrac{1}{(4k+1)(4k+5)}$

$$= \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}.$$

PROBLEMA 17. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)}.$$

Entonces

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$$
$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

Problema 19. 1) La fórmula se cumple para $n=1$ y para $n=2$.

2) Supóngase que $u_{k-2}=\dfrac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$, $u_{k-1}=\dfrac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}$.

Entonces $u_k=(\alpha+\beta)\dfrac{\alpha^{k}-\beta^{k}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\dfrac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$.

Problema 21. 1) Para $n=0$ la fórmula toma la forma

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}.$$

Por tanto se ve que la fórmula se cumple en este caso.

2) Supóngase que

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Entonces $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\cdots+\dfrac{2^k}{1+x^{2^k}}+\dfrac{2^{k+2}}{1+x^{2^{k+1}}}$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

(Ver la Segunda Observación de la sección 4 en el capítulo 1.)

Problema 23. Para $n=1$ se tiene

$$1-\frac{x}{1!}=-\frac{x-1}{1}.$$

Para $n=2$ se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=-\frac{x-1}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{(x-1)(x-2)}{2!}.$$

Para $n=3$ se tiene

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}$$

Esto sugiere la hipótesis de que

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}.$$

1) La hipótesis se cumple para $n=1$.
2) Supóngase que

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!}.$$

Entonces

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\cdots+(-1)^k\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^k\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!}+(-1)^{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{(k+1)!}$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)}{k!}\left[\frac{x}{k+1}-1\right]$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)(x-k-1)}{(k+1)!}.$$

Problema 26. 1) La fórmula se cumple para $n=0$.
2) Supóngase que la fórmula se cumple para $n=k$; es decir, que

$$A_k=11^{k+2}+12^{2k+1}$$

es divisible por 133. Entonces

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=11^{k+3}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}\\&=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}\\&=11\cdot 11^{k+2}+133\cdot 12^{2k+1}+11\cdot 12^{2k+1}\\&=11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}\\&=11A_k+133\cdot 12^{2k+1}.\end{aligned}$$

Se ha demostrado que A_{k+1} es la suma de dos números cada uno de los cuales es divisible por 133; en consecuencia, A_{k+1} es divisible por 133.

Problema 28. La proposición es verdadera para el caso donde $n = 1$, ya que una recta divide el plano en 2 partes.

Supóngase que k rectas diferentes que pasan por un punto dado dividen al plano en $2k$ partes. Entonces, si se tiene una $(k + 1)$-ésima recta que también pasa por el punto dado, ésta dividirá en dos a dos de las partes originales. De aquí que el plano se dividirá en $2(k + 1)$ partes.

Problema 29, 1) La recta AB divide al plano P en dos semiplanos, P_1 y P_2. Coloréese P_1 en blanco y P_2 en negro, para satisfacer los requisitos del problema. Así, se ve que la proposición es verdadera para $n = 1$.

2) Supóngase que la proposición se cumple para $n = k$ y supóngase que se ha coloreado el plano P de acuerdo con los requisitos del problema. Considérese que la $(k + 1)$-ésima recta CD divide el plano en dos semiplanos, Q_1 y Q_2. En todo Q_1 no alteremos el color: sin embargo, en Q_2 remplacemos el blanco por el negro y el negro por el blanco.

Ahora sean O_1 y O_2 dos regiones vecinas cualesquiera de la figura después de que se trazó la recta CD. Existen dos posibilidades para considerar:

a) O_1 y O_2 se encuentran en lados opuestos de CD,
b) O_1 y O_2 se encuentran en el mismo lado de CD.

En el primer caso, O_1 y O_2 deben haber formado una sola región antes de que se trazara la recta CD y, por tanto, tenían el mismo color. Después de que se trazó CD, aquella que quedó en Q_1 mantuvo su coloración, mientras que la que resultó en Q_2 ha cambiado su coloración.

En el segundo caso, antes de que se trazara CD, O_1 y O_2 eran parte de dos regiones vecinas diferentes cuya frontera común era una de las k rectas originales; en consecuencia, deben haber tenido colores diferentes. Si, después de haber trazado CD, ambas quedaron en Q_1, el color de cada una no cambió. Si, por otra parte, ambas quedaron en Q_2, se cambió el color de cada una. En cualquiera de los casos, O_1 y O_2 tienen colores diferentes.

Problema 34. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \cos x.$$

2) Supóngase que $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

Entonces

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx + \cos(k+1)x$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + \cos(k+1)x = \frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(k+1)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x + \left(\operatorname{sen}\frac{2k+3}{2}x - \operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{2k+3}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

Problema 35. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}x\left[1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}x\left(1 - \cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{sen}x.$$

2) Supóngase que

$$\operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}2x + \cdots + k\operatorname{sen}kx = \frac{(k+1)\operatorname{sen}kx - k\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

Entonces

$$\operatorname{sen}x + 2\operatorname{sen}2x + \cdots + k\operatorname{sen}kx + (k+1)\operatorname{sen}(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\operatorname{sen}kx - k\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} + (k+1)\operatorname{sen}(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\operatorname{sen}kx - k\operatorname{sen}(k+1)x + 2(k+1)\operatorname{sen}(k+1)x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x + (k+1)\operatorname{sen}kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} - \frac{2(k+1)\cos x\operatorname{sen}(k+1)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x + (k+1)\operatorname{sen} kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} - \frac{(k+1)[\operatorname{sen}(k+2)x + \operatorname{sen} kx]}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\operatorname{sen}(k+1)x - (k+1)\operatorname{sen}(k+2)x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

PROBLEMA 36. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{2\cos x - \cos 2x - 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos x - 2\cos^2 x}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos x\,(1-\cos x)}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \cos x.$$

2) Supóngase que

$$\cos x + 2\cos 2x + \cdots + k\cos kx$$
$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}.$$

Entonces

$$\cos x + 2\cos 2x + \cdots + k\cos kx + (k+1)\cos(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} + (k+1)\cos(k+1)x$$

$$= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} + \frac{2(k+1)\cos(k+1)x(1-\cos x)}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} - \frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x + 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} - \frac{(k+1)[\cos(k+2)x + \cos kx] + 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x - (k+1)\cos(k+2)x - 1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}$$

PROBLEMA 37. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} = \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}.$$

2) Supóngase que

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - \cot x.$$

Entonces $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$

$$= \frac{1}{2^k}\cot\frac{x}{2^k} - \cot x + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{x}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{\cot^2\frac{x}{2^{k+1}} - 1}{\cot\frac{x}{2^{k+1}}} + \frac{1}{2^{k+1}\cot\frac{x}{2^{k+1}}} - \cot x = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{x}{2^{k+1}} - \cot x.$$

PROBLEMA 38. 1) Como

$$\tan(\operatorname{arc\,tan} 2 - \operatorname{arc\,tan} 1) = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3},$$

se concluye que

$$\operatorname{arc\,tan} 2 - \operatorname{arc\,tan} 1 = \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,cot} 3.$$

De aquí que la fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Primero probemos que

$$\operatorname{arc\,cot}(2k+3) = \operatorname{arc\,tan}\frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tan} 1. \tag{1}$$

En efecto, $\tan\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tan} 1\right) = \dfrac{\frac{k+2}{k+1} - 1}{1 + \frac{k+2}{k+1}} = \dfrac{1}{2k+3}.$

De aquí que

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{2k+3} = \operatorname{arc\,cot}(2k+3) = \operatorname{arc\,tan}\frac{k+2}{k+1} - \operatorname{arc\,tan} 1.$$

Supóngase que la fórmula se cumple para $n = k$; es decir

$$\operatorname{arc\,cot} 3 + \operatorname{arc\,cot} 5 + \cdots + \operatorname{arc\,cot}(2k+1)$$
$$= \operatorname{arc\,tan} 2 + \operatorname{arc\,tan}\frac{3}{2} + \cdots + \operatorname{arc\,tan}\frac{k+1}{k} - k\operatorname{arc\,tan} 1. \tag{2}$$

Entonces, probemos ahora que la fórmula también se cumple para $n = k + 1$; es decir,

$$\begin{aligned}&\operatorname{arc\,cot} 3 + \operatorname{arc\,cot} 5 + \cdots + \operatorname{arc\,cot}(2k+3)\\ &= \arctan 2 + \cdots + \arctan\frac{k+2}{k+1} - (k+1)\arctan 1. \qquad (3)\end{aligned}$$

Sumando término a término las igualdades (1) y (2) se obtiene la igualdad (3).

PROBLEMA 40. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right).$$

2) Supóngase que $(\sqrt{3} - i)^k = 2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\right)$.

Entonces $(\sqrt{3} - i)^{k+1} = 2^k\left(\cos\frac{k\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{k\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)\pi}{6} - i\operatorname{sen}\frac{(k+1)\pi}{6}\right].$$

PROBLEMA 42. 1) La fórmula se cumple para $n = 1$.

2) Supóngase que

$$(\cos x + i\operatorname{sen} x)^k = \cos kx + i\operatorname{sen} kx.$$

Entonces $(\cos x + i\operatorname{sen} x)^{k+1} = (\cos kx + i\operatorname{sen} kx)(\cos x + i\operatorname{sen} x)$

$$= \cos(k+1)x + i\operatorname{sen}(k+1)x.$$

PROBLEMA 44. El error está precisamente en la última frase: "Esto prueba la desigualdad". De hecho, simplemente se ha demostrado que la desigualdad

$$2^n > 2n + 1$$

se cumple para $n = k + 1$, si se cumple para $n = k$, donde k es un número natural arbitrario.

Sin embargo, esto no prueba que la desigualdad se cumple para *tan sólo* un valor de n, y mucho menos para todos los valores de n, donde n es un número natural. En pocas palabras, el error consiste en sólo probar la condición 2, y no considerar la condición 1, o sea que no se ha proporcionado la base para una demostración inductiva.

PROBLEMA 45. Fácilmente se observa que 3 es el menor número natural para el cual se cumple la desigualdad $2^n > 2n + 1$.

Tomando en consideración el hecho de que la validez de la desigualdad para $n = k$ implica su validez para $n = k + 1$ (problema 44), se concluye que la desigualdad se cumple para todo número natural $n \geq 3$.

PROBLEMA 48. 1) La fórmula se cumple para $n = 2$, ya que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

2) Suponiendo que $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ (1)

probemos que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}. \qquad (2)$$

Para todo $k > 0$, la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \qquad (3)$$

se cumple. En efecto, la desigualdad (3) se obtiene a partir de la desigualdad

$$1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} > 1$$

multiplicando ambos miembros por $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Sumando término a término las desigualdades (1) y (3), se obtiene la desigualdad (2).

PROBLEMA 49. 1) La desigualdad se cumple para $n = 2$, ya que $\dfrac{16}{3} < 6$.

2) Supóngase que

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2},$$

donde $k \geq 2$. Es fácil probar que para $k > 0$

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}.$$

De aquí que

$$\frac{4^k}{k+1}\cdot\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$$

es decir,

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2}$$