Sustracción y División

Definición 1. *$\forall x, y \in F$ definimos $x - y = x + (-y)$*

Definición 2. *$\forall x, y \in F$ Si $y \neq 0$ definimos $x \div y = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = x \cdot y^{-1}$*

Propiedades de la Sustracción

Teorema 1. *(a) $\forall x \in F$, $0 - x = -x$*
(b) $\forall x, y, z \in F$, $x(y = z)x = xy - xz$
(c) $\forall x, y \in F$, $-(x + y) = -x - y$
(d) $\forall x, y \in F$, $-(x - y) = y - x$

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$0 - x = 0 + (-x) = -x$$

(b) Tenemos que

$$x(y - z) = x[y + (-z)] = xy + x(-z) = xy + (-xz) = xy - xz$$

(c) Tenemos que

$$-(x + y) = (-1)(x + y) = (-1)x + (-1)y = -x + (-y) = -x - y$$

(d) Tenemos que

$$-(x - y) = -(x + (-y)) = (-1)(x + (-y)) = (-1)x + (-1)(-y) = -x + (-(-y)) - x + y$$

$\square$

Propiedades de la División

Teorema 2. *(a) $\forall x \in F$, si $x \neq 0$ entonces $0 \div x = 0$*
(b) $\forall x \in F$, $x \div 1 = x$; si $x \neq 0$ entonces $1 \div x = x^{-1}$
(c) $\forall x \in F$, si $x \neq 0$ entonces $(-x)^{-1} = -x^{-1}$
(d) $\forall y \neq 0$, $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(e) Si $b, c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
(f) si $b, d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
(g) si $b, d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
(h) si $b \neq 0$, entonces $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$
(i) si $b \neq 0$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
(j) si $a \neq 0$, entonces la ecuación $ax + b = 0$ tiene una única solución $x = -\frac{b}{a}$

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$x \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 \div x = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

(b) Tenemos que

$$\forall\, x \;\in F, \quad x \div 1 = x \cdot 1^{-1} = x \cdot 1 = x$$

por otro lado

$$1 \div x = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}$$

(c) Tenemos que

$$(-x)(-x^{-1}) = x \cdot x^{-1} = 1 \quad \therefore \quad -x^{-1} = (-x)^{-1}$$

(d) Supongamos $y \neq 0 \in F$. Entonces $y^{-1} \neq 0$ y por definición $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ por lo tanto

$$\frac{x}{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot y - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \; o \; y^{-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\; pues \;\; y^{-1} \neq 0$$

(e) Supongamos que $b, c \neq 0$. Entonces se tiene que $c \cdot c^{-1} = 1$,

$$\frac{ac}{bc} = (ac)(bc)^{-1} = (ac)(c^{-1}b^{-1}) = a(c \cdot c^{-1})b^{-1} = a(1)b^{-1} = \frac{a}{b}$$

(f) Supongamos que $b, d \neq 0$. Entonces $(bd) \cdot (bd)^{-1} = 1$ y por tanto

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = ab^{-1}+cd^{-1} = (ab^{-1}+cd^{-1})(1) = (ab^{-1}+cd^{-1})((bd)\cdot(bd)^{-1}) = \left[ab^{-1}bd + cd^{-1}bd\right](bd)^{-1} =$$

$$(a(b^{-1}b)d + c(d^{-1}d)b)(bd)^{-1} = (a(1)d + c(1)b)(bd)^{-1} = (ad+cb)(bd)^{-1} = \frac{ad+cb}{bd}$$

(g) Supongamos que $b, d \neq 0$. Entonces

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1}) = [(ab^{-1})c]d^{-1} = [a(b^{-1}c)]d^{-1} = [a(cb^{-1})]d^{-1} = (ac)(b^{-1}d^{-1})(ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

(h) Supongamos que $b \neq 0$. Entonces

$$-\frac{a}{b} = -(ab^{-1}) = (-a)b^{-1} = a(-b^{-1})$$

(i) Supongamos que $a, b \neq 0$. Entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = (ab)(ab)^{-1} = 1$$

por lo tanto

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

(j) Supongamos que $a \neq 0$. Entonces

$$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; (ax+b)\left(a^{-1}\right) = 0 \cdot a^{-1} = 0 \;\Rightarrow\; axa^{-1} + b \cdot a^{-1} = 0 \;\Rightarrow\; aa^{-1}x + b \cdot a^{-1} = 0 \;\Rightarrow$$

$$1 \cdot x + b \cdot a^{-1} = 0 \;\Rightarrow\; x + b \cdot a^{-1} = 0$$

por lo tanto

$$x = -b \cdot a^{-1} = -\frac{b}{a}$$

□