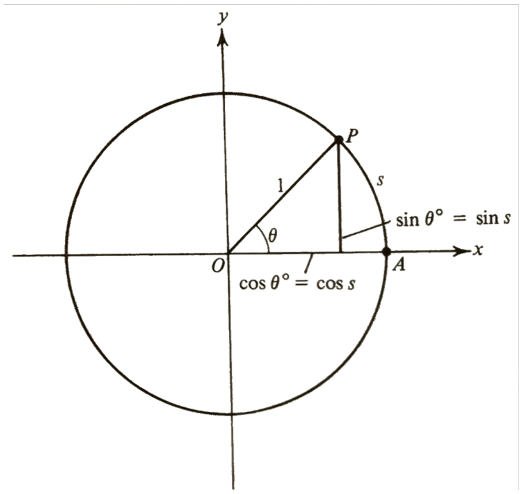
Funciones Trigonométricas

Definición 1. *Dado un circulo de radio 1 y un punto P sobre el circulo a un ángulo θ, definimos*



$$\cos\theta = Abcisa\ deP$$

$$\operatorname{sen}\theta = Ordenada\ deP$$

Si S es el mismo ángulo medido en radianes y $|S|$ es la longitud del arco $\widehat{AP}$ entonces

$$\cos S = Abcisa\ deP$$

$$\operatorname{sen} S = Ordenada\ deP$$

La relación entre ángulos y radianes la podemos escribir en términos de las funciones

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{360}\right), \quad g(x) = f\left(\frac{360x}{2\pi}\right)$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de 90° se tiene

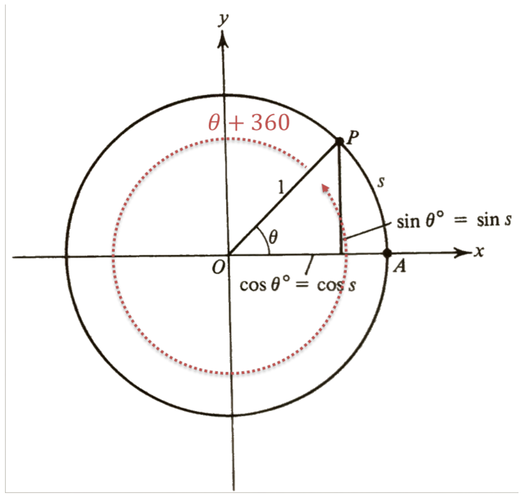
$$f(90) = \frac{2\pi(90)}{360} = \frac{\pi 180}{360} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de $\frac{\pi}{2}$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{360\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{360(\pi)}{4\pi} = 90$$

(1) Dado que $\theta = \theta + 360$ se tiene entonces que

$$\cos(x+360) = \cos(x) \quad y \quad \operatorname{sen}(x+360) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall\ x$$



consecuentemente $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son funciones periódicas

(2) Por definición $\cos\theta = \textit{Abcisa de } P$ y como $-1 \leq \textit{Abcisa de } P \leq 1$ entonces

$$|\cos\theta| \leq 1$$

Por definición $\operatorname{sen}\theta = \textit{Ordenada de } P$ y como $-1 \leq \textit{Ordenada de } P \leq 1$ entonces

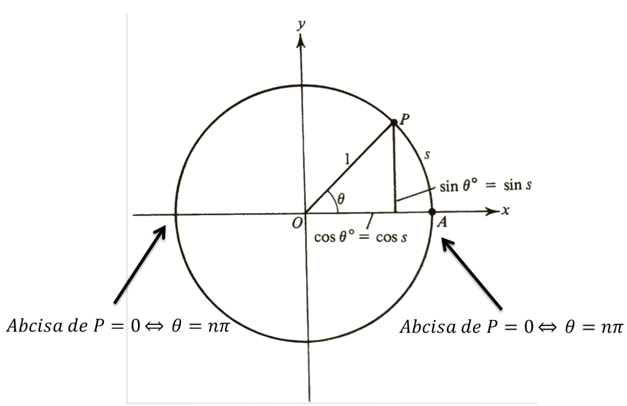
$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$$

(3) Se tiene que

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad y \quad \operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x), \quad \forall\ x$$

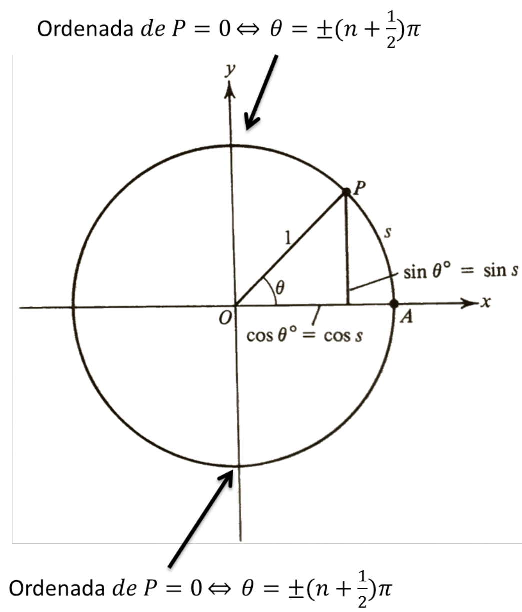
(4) Por definición $\cos\theta = \textit{Abcisa de } P$ se tiene entonces

$$\cos\theta = 0 \iff \theta = \pm\pi$$



(5) Por definición $\operatorname{sen}\theta = \mathit{Ordenada\ de\ P}$ se tiene entonces

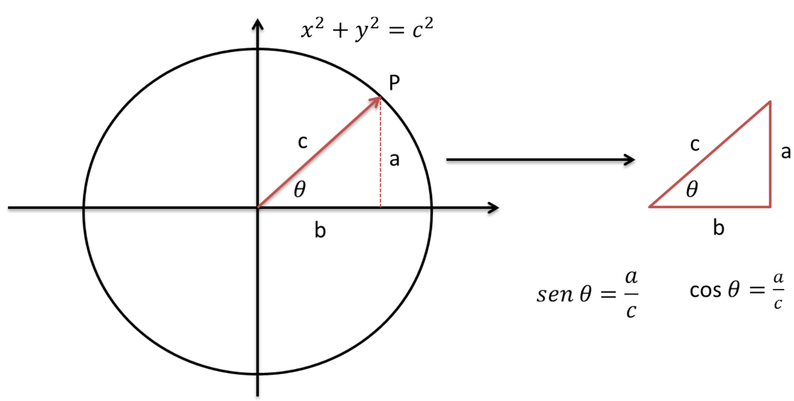
$$\operatorname{sen}\theta = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$



(6) Definimos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(7) Si tenemos un circulo de radio c entonces



$$b^2 + a^2 = c^2 \;\Rightarrow\; \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

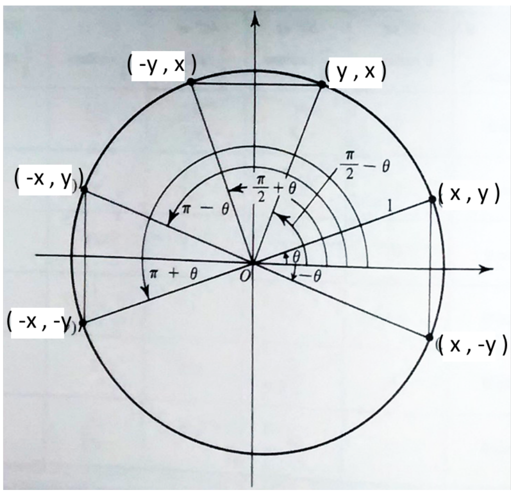
por definición

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \;\; y \;\; \operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} \;\Rightarrow\; c\cos\theta = b \;\; y \;\; c\operatorname{sen}\theta = a$$

Ejemplo Vamos a calcular los valores de 45, en este caso se tiene

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \; y \; c = 1 \;\Rightarrow\; \cos\ 45 = \frac{1}{\sqrt{2}},\;\; \operatorname{sen}\ 45 = \frac{1}{\sqrt{2}},\;\; \tan\ 45 = 1,\;\; \cot\ 45 = 1,\;\; \sec\ 45 = \sqrt{2},\;\; \csc\ 45 = \sqrt{2}$$

Ejercicio Según la figura



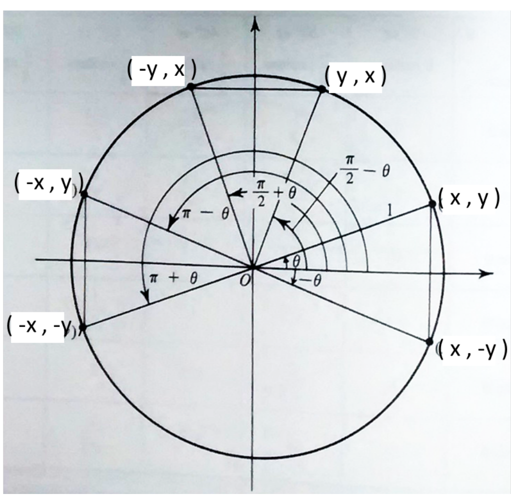
Para $P = (x, y)$ se tiene que el ángulo es θ por lo que

$$\cos\theta = x, \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = y$$

Para el $P = (y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} - \theta$ por lo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = y \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$



Para $P = (-y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} + \theta$ por lo que

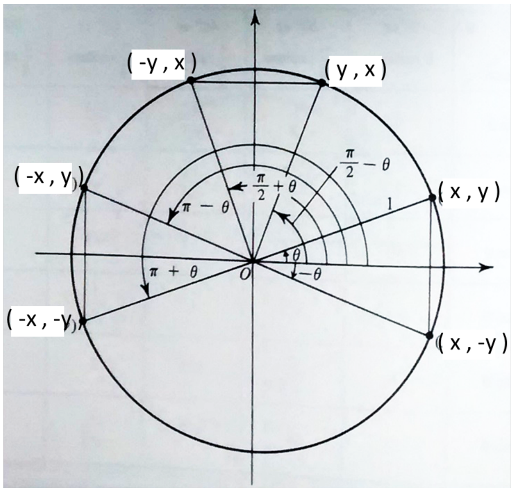
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -y \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

Para $P = (-x, y)$ se tiene que el ángulo es $\pi - \theta$ por lo que

$$\cos(\pi - \theta) = -x \;\Rightarrow\; \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = y \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$



Para $P = (-x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi + \theta$ por lo que

$$\cos(\pi + \theta) = -x \Rightarrow \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

Para $P = (x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi + \theta$ por lo que

$$\cos(-\theta) = x \Rightarrow \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

de esto último podemos decir que $\cos\theta$ es una función par
de esto último podemos decir que $\operatorname{sen}\theta$ es una función impar
Podemos encontrar ahora el valor de las siguientes funciones trigonométricas

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta)} = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

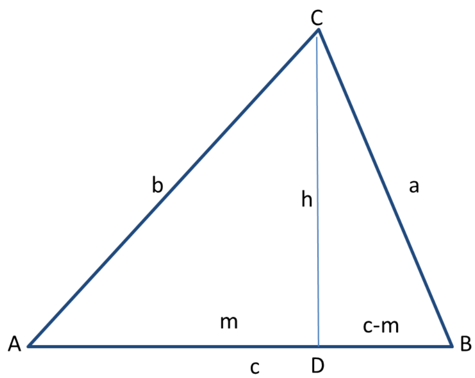
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = \frac{\cos(\pi - \theta)}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\cot\theta$$

Teorema Generalizado de Pitagoras



Dado un triángulo ABC trazamos la altura CD y formamos dos triángulo rectángulos
Para el triángulo CDB se tiene

$$a^2 = (c-m)^2 + h^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2$$

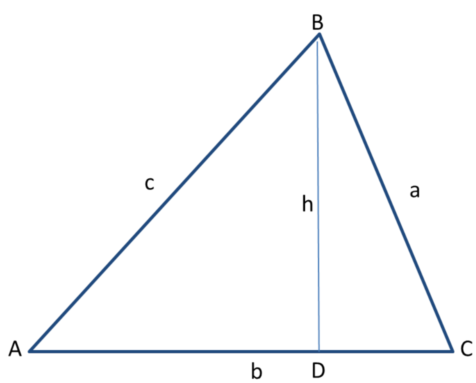
Para el triángulo ADC se tiene

$$b^2 = m^2 + h^2 \;\Rightarrow\; b^2 - m^2 = h^2$$

por lo tanto

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cm$$

Ley de Cosenos



Dado un triángulo ABC trazamos la altura BD
Según el teorema generalizado de pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$$

Por otro lado se tiene

$$\cos A = \frac{AD}{c} \;\Rightarrow\; c\;\cos A = AD$$

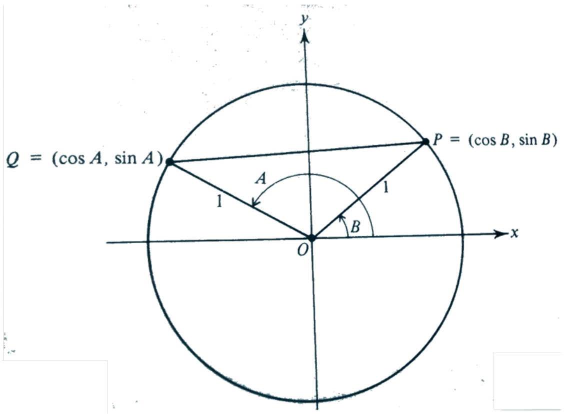
por lo tanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\;\cos A$$

Procediendo analogamente se tiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\;\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\;\cos C$$



Según la figura por la fórmula de la distancia

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B)^2$$

$$= \cos^2 A - 2\cos A\cos B + \operatorname{sen}^2 - 2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B + \cos^2 B + \operatorname{sen}^2 B$$

$$= 2 - 2(\cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)$$

Ahora según la ley de cosenos

$$|PQ|^2 = 2 - 2\cos(A - B)$$

por lo tanto

$$2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2(\cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)$$

simplificando

$$\cos(A - B) = \cos B\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

Si en la fórmula anterio sustituimos B por $-B$ se tiene

$$\cos(A + B) = \cos(A - (-B)) = \cos(-B)\cos A + \operatorname{sen} A\operatorname{sen}(-B) = \cos B\cos A - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

Si en la fórmula anterior sustituimos B *por* $B + \dfrac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A\cos B + \cos A\operatorname{sen} B$$