Valor Absoluto

Definición 1.

Sea F un campo ordenado. Para cada $x \in F$ definimos el Valor absoluto de x como:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Teorema 1. *Propiedades básicas de valor absoluto. Sea F un campo ordenado. Entonces* $\forall\ x, y \in F$ *se satisface*
(a)$|x| \geq 0$
(b)$|-x| = |x|$
(c)$-|x| \leq x \leq |x|$
(d)$|x-y| = |y-x|$
(e)$|xy| = |x||y|$

Demostración. **(a)** Por O_3 se tiene que $x \geq 0$ ó $x < 0$

$$Si \quad x \geq 0 \quad entonces \quad |x| = x \geq 0$$

$$Si \quad x < 0 \quad entonces \quad |x| = -x \geq 0$$

(b) Por definición se tiene

$$|-x| = \begin{cases} -x & si \quad -x \geq 0 \\ -(-x) & si \quad -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad -(-x) \leq 0 \\ -(-x) & si \quad -(-x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases} = |x|$$

(c) Sea $x \in F$. Entonces $x \geq 0$ ó $x < 0$

$$Caso\,1 \ \ (x \geq 0): \ \ Entonces \ \ 0 \leq x = |x|, \ \ y \ \ por \ \ tanto \ \ -|x| \leq 0 \leq x \leq |x| \ \ es \ \ decir \ \ -|x| \leq x \leq |x|$$

$$Caso\,2 \ \ (x < 0): \ \ Entonces \ \ |x| = -x, \ \ y \ \ por \ \ tanto \ \ -|x| = x < 0 \leq |x| \ \ es \ \ decir \ \ -|x| \leq x \leq |x|$$

(d) Tenemos que

$$|x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$$

(e) Se tienen cuatro casos (1) $x \geq 0$, $y \geq 0$. Entonces $xy \geq 0$ y $|xy| = xy = |x||y|$.
(2) $x \geq 0$, $y < 0$. Entonces $xy \leq 0$ y $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$
(3) $x < 0$, $y \geq 0$. Entonces $xy \leq 0$ y $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$
(4) $x < 0$, $y < 0$. Entonces $xy > 0$ y $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

□