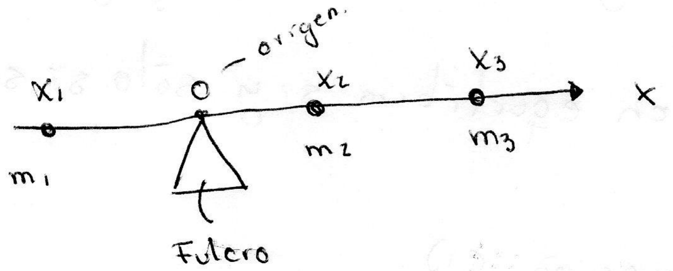
Clase Sabado.

Masas a lo largo de una recta.



El sistema resultante puede quedar balanceado o no, dependiendo del tamaño y distribucion de las masas.

Cada masa ejerce una fuerza hacia abajo llamada peso

$F = W = \text{peso} = m_k g$

Donde g es la gravedad.

Cada fuerza tiende a hacer girar el eje alrededor del origen, de la misma manera en que ocurre cuando se gira un trompo, este efecto se llama torque, la cual se expresa con la siguiente relacion:

$$\text{torque} = m_k g x_k.$$

Las masas a la izquierda del origen ejercen un torque negativo y las masas a la derecha del origen ejercen un torque positivo.

La suma de los torques del sistema es:

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \quad \text{--- (1)}$$

Donde el sistema quedará en equilibrio si y sólo si su torque es igual a cero.

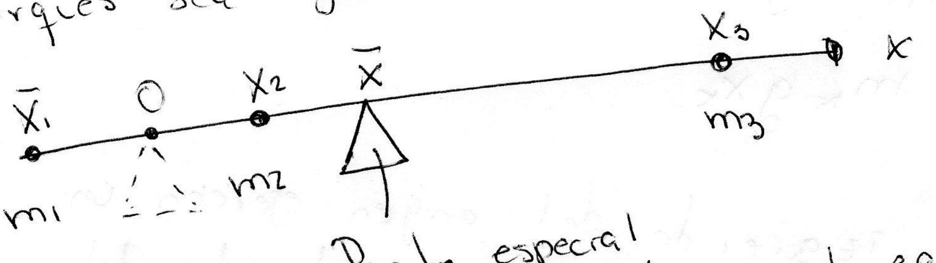
Factorizando g en ecuación (1) tenemos:

$$g(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) = g M_0.$$

donde $M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3.$

$M_0 =$ Momento del sistema respecto del origen $= \sum m_k x_k$

Queremos conocer en dónde colocar el fulcro para que el sistema esté en equilibrio, nos interesa saber en qué punto colocar $\bar{x}$ para que la suma de los torques sea igual a cero.



Punto especial en donde se logra el equilibrio.

$$\Rightarrow \text{Torque de } m_k \text{ respecto de } \bar{x} = \left(\begin{array}{c}\text{distancia con signo de } m_k \\ \text{a } \bar{x}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{Fuerza hacia} \\ \text{abajo}\end{array}\right)$$

Torque de m_k respecto de $\bar{x}$ = $(x_k - \bar{x}) m_k g$

Entonces tenemos que para el sistema completo:

$$\sum (x_k - \bar{x}) m_k g = 0$$

$$g \sum (x_k - \bar{x}) m_k = 0 \Rightarrow \sum (m_k x_k - \bar{x} m_k) = 0$$

$$\Rightarrow \sum m_k x_k - \sum \bar{x} m_k = 0.$$

$$\sum m_k x_k = \bar{x} \sum m_k$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto del origen}}{\text{masa del sistema.}}$$

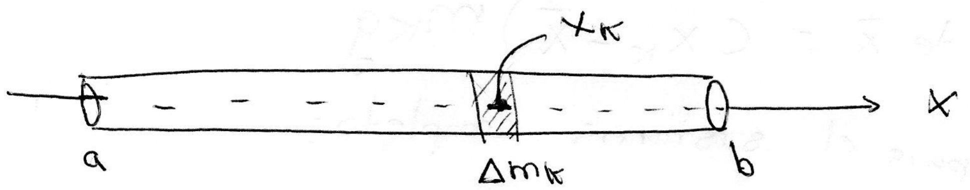
Donde $\bar{x}$ es el centro de masa.

Ejemplo:

Alambre ó varilla delgada:

Si tenemos una granja larga y delgada en el eje x desde $x=a$ hasta $x=b$, y lo cortamos en pequeñas partes de masa Δm_k por medio de una partición del intervalo $[a, b]$.

Elegimos x_k en el k-ésimo subintervalo de la partición.



Tenemos que:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{momento del sistema}}{\text{masa del sistema.}}$$

El momento de cada pieza de la franja respecto del origen es aproximadamente $x_k \, \Delta m_k$, por lo que el momento del sistema es:

$$M_0 \approx \sum x_k \Delta m_k$$

Si la densidad de la franja en x_k es $\delta(x_k)$, expresada en términos de masa por unidad de longitud y si δ es continua, entonces Δm_k es aproximadamente igual a $\delta(x_k) \Delta x_k$.

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k) \Delta x_k$$

Entonces:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} = \frac{\sum x_k \delta(x_k) \Delta x_k}{\sum \delta(x_k) \Delta x_k}$$

La suma en el último numerador de la ecuación es una suma de Riemann para la función continua $x\delta(x)$

en el intervalo $[a,b]$.

La suma en el denominador es una suma de Riemann para la función $\delta(x)$ en ese intervalo.

Entonces:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

Por lo tanto:

Momento con respecto al origen $M_0 = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx$

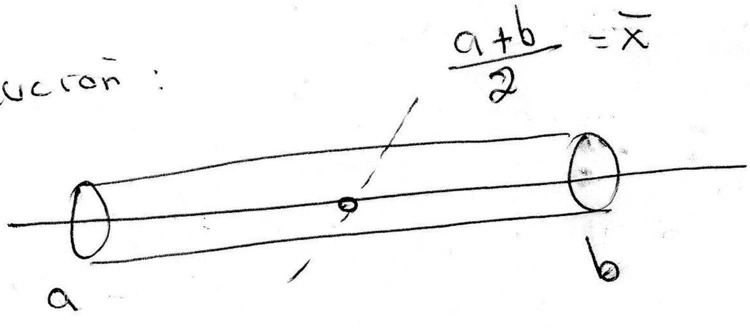
Masa $M = \int_a^b \delta(x)\,dx$

Centro de masa $\overline{x} = \frac{M_0}{M}$

Ejercicio 1)

Demostrar que el centro de masa de una varilla o de una franja recta y delgada de densidad constante se encuentra en su punto medio.

Solución:



Tenemos que demostrar que:

$$\bar{x} = \frac{(a+b)}{2}$$, el punto medio de a y b.

Como la densidad tiene un valor constante, nos permite considerar la función $\delta(x)$ en las integrales como una constante δ, con lo que resulta:

$$M_0 = \int_a^b \delta\, x\, dx = \delta \int_a^b x\, dx = \delta \left[\frac{1}{2} x^2\right]_a^b$$

$$= \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$

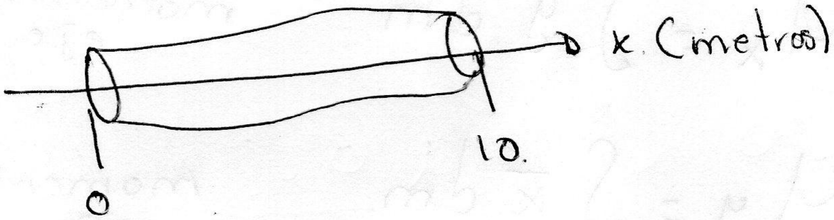
$$M = \int_a^b \delta\, dx = \delta \int_a^b dx = \delta(x)\Big|_a^b = \delta(b-a)$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Ejercicio 2.

La varilla de 10 cm de longitud que se ilustra en la figura ②, aumenta su grosor de izquierda a derecha, por lo que su densidad, en lugar de ser constante es $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10}$ kg/m.

Determine su centro de Masa:



Solución:

Tenemos que:

$$M_0 = \int_0^{10} x\,\delta(x)\,dx = \int_0^{10} x\left(1 + \frac{x}{10}\right)dx$$

$$M_0 = \int_0^{10}\left(x + \frac{x^2}{10}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{30}\right]_0^{10}$$

$$M_0 = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3} \quad \text{kg}\cdot\text{m}$$

La masa de la varilla:

$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,dx = \int_0^{10}\left(1 + \frac{x}{10}\right)dx$$

$$M = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 10 + 5 = 15 \text{ kg}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{M_o}{M} = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx \underline{5{,}56 \text{ metros}}$$

Momentos, masa y centro de masa de una placa delgada que cubre una región en el plano xy:

$$M_x = \int \tilde{y} \, dm$$ momento con respecto al eje x

$$M_y = \int \bar{x} \, dm$$ momento con respecto al eje y

$$M = \int dm$$ Masa.

Centro de masa $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$; $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$