Integrando Derivadas

Definición 1. *Una función F es una antiderivada de una función f sobre un conjunto A si tanto F, f estan definidos sobre A y*

$$\forall\ x \in A, F'(x) = f(x)$$

Teorema 1. *Teorema fundamental del cálculo (Versión 1).*
Supongase que f es integrable sobre $[a, b]$. Si F es una antiderivada de f sobre (a, b) es decir continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces si aplicamos el teorema del valor medio en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces existe $x^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F'(x^*) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta_i}$$

$$\Rightarrow\ F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x^*)\Delta_i, \quad para\ \ algun\ \ x^* \in (x_{i-1}, x_i)$$

por lo tanto

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x^*)\Delta_i = R(f, P)$$

Por sumas de Riemann tenemos que

$$\underline{S}(f, P) \leq R(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$$

tenemos entonces que

$$\underline{S}(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, P)$$

como f es integrable

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

□

Otra forma de decir lo anterior es que si integramos la derivada de una función, el resultado será la función original evaluada en los limites de integración, es decir:

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Ejemplo Usando el teorema fundamental del cálculo hallar

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

Solución Tenemos que hallar una $F(x)$ tal que $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Dado que

$$(\arctan\ x)' \underbrace{=}_{Si\ f(x)=\tan\ x\ \ entonces\ \ f^{-1}(x)=\arctan\ x\ \Rightarrow\ (f^{-1})'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sec^2\ (\arctan\ x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

la última igualdad la justificamos asi:

$$\sec^2(\arctan\ x) = 1 + [\tan(\arctan\ x)]^2 = 1 + x^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sec^2(\arctan\ x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Proponemos entonces

$$F(x) = \arctan\ x$$

de manera que $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = F(b) - F(a) = \arctan\ b - \arctan\ a$$

Ejemplo Usando el teorema fundamental del cálculo hallar

$$\int_a^b \sec\ x\ dx$$

Solución Tenemos que hallar una $F(x)$ tal que $F'(x) = \sec\ x$. Para ellos hacemos lo siguiente:

$$\sec\ x = \sec\ x\left(\frac{\sec\ x\ +\ \tan\ x}{\sec\ x\ +\ \tan\ x}\right) = \frac{\sec^2\ x\ + \sec\ x\ \tan\ x}{\sec\ x\ +\ \tan\ x}$$

Dado que

$$(\ln(\sec\ x\ +\ \tan\ x))' = \left(\frac{1}{\sec\ x\ +\ \tan\ x}\right)(\sec^2\ x + \sec\ x\ \tan\ x) = \frac{\sec^2\ x\ + \sec\ x\ \tan\ x}{\sec\ x\ +\ \tan\ x} = \sec\ x$$

Proponemos entonces

$$F(x) = \ln(\sec\ x\ +\ \tan\ x)$$

de manera que $F'(x) = \sec\ x$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b \sec\ x\ dx = F(b) - F(a) = \ln(\sec\ b\ +\ \tan\ b) - \ln(\sec\ a\ +\ \tan\ a)$$

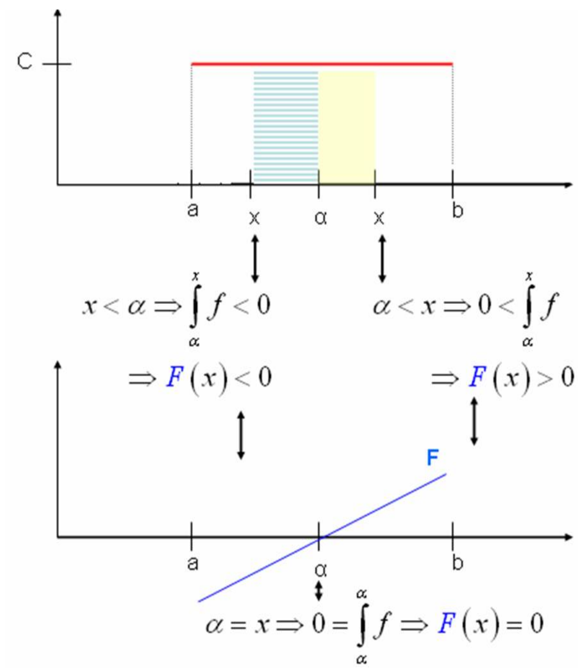
Derivando Integrales

Sea $f : [a, b] \to R$ integrable, con base en la función f, podemos construir una nueva función a través de la siguiente regla de correspondencia

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f$$

donde α es una constante fija en [a,b] y x cualquier valor de [a,b]. Para cada $x \in [a, b]$, $\int_{\alpha}^{x} f$ determina uno y sólo un valor, de esta forma $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es efectivamente una función a esta función se le llama **Integral como límite superior**.

Sea f(x)=C con $C > 0$ entonces

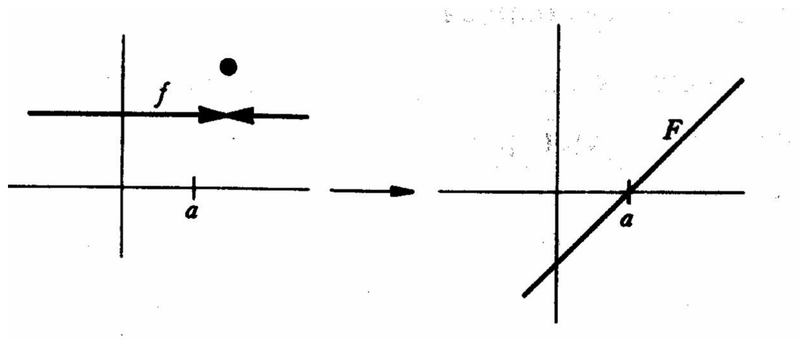


Si tomamos x a la derecha de α obtenemos un rectángulo cuya base mide $x - \alpha$ y de altura mide C y por tanto el área es (x-a)c=xc-xa.

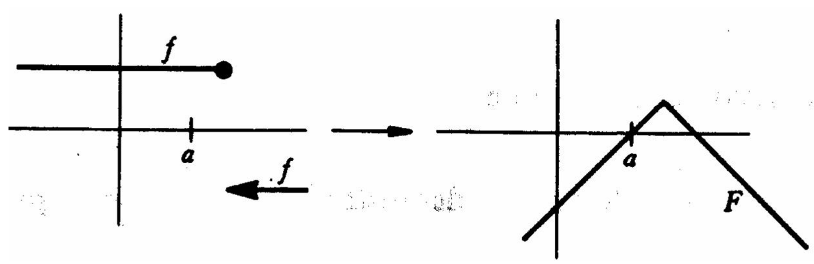
Si x está a la izquierda de α obtenemos exactamente la misma expresión solo que $(x - \alpha)$ es negativo.

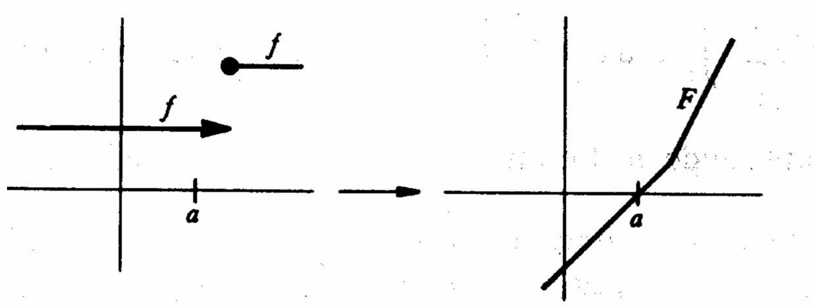
De esta manera F(x) es una recta y como $\int_{\alpha}^{\alpha} f = 0$ tenemos una función F creciente. En la siguiente figura se muestran algunos casos del comportamiento de F, dependiendo si f es creciente, decreciente, discontinua, positiva o negativa

f con una discontinuidad removible



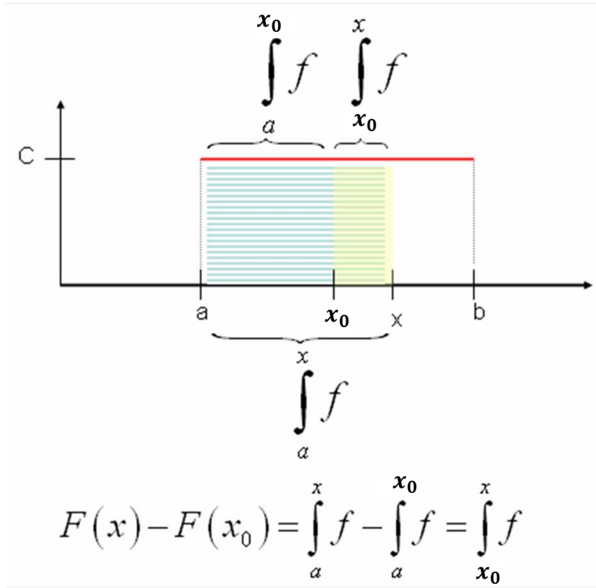
f con una discontinuidad esencial





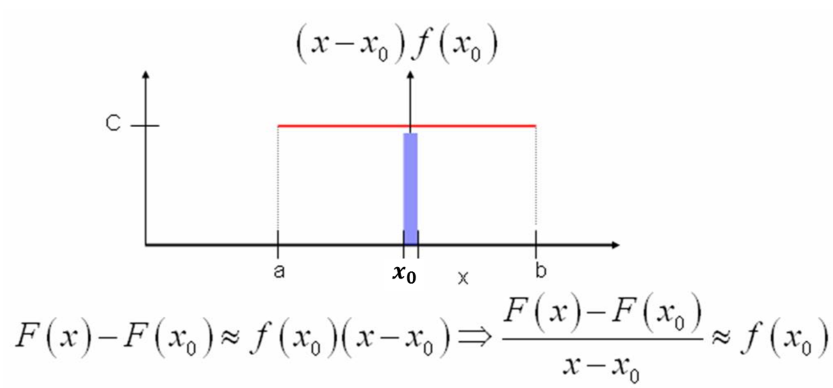
Es de esperarse que si f es continua en x_0 entonces F sea derivable en x_0.

Veamos la relación entre f y F

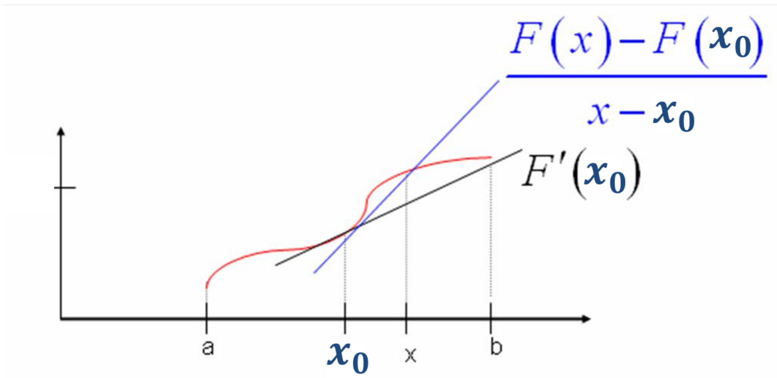


Si x esta suficientemente cercano a x_0, la diferencia

$$F(x)-F(x_0)\approx(x-x_0)f(x_0)\ \ es\ \ decir\ \ \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\approx f(x_0)$$



En la gráfica de F



Si x y x_0 estan suficientemente cercanos

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \approx F'(x_0)$$

Es de esperar que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

Por lo tanto

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Teorema 2. *(Teorema Fundamental del Cálculo (Versión 2))*
Sea $f:[a,b]\to R$, integrable en [a,b] y continua en x_0, entonces la función $f:[a,b]\to R$ definida por

$$F(x) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$

Idea de la demostración

Demostración. Tenemos que

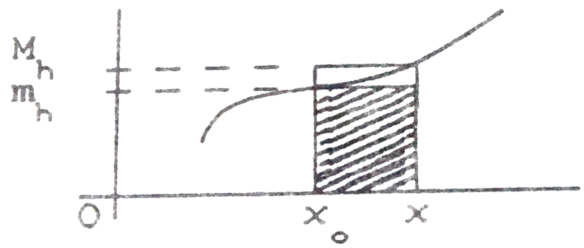
$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

y sean

$$m_h = inf\{f(t)|t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$$

$$M_h = sup\{f(t)|t \in [x_0, x] = [x_0, x_0 + h]\}$$

$$m_h(f)(x-x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq M_h(f)(x-x_0)$$



entonces

$$mh(f)(x-x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq Mh(f)(x-x_0)$$

y

$$mh(f) \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq Mh(f)$$

y calculamos el límite

$$\lim_{x\to x_0} mh(f) \leq \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq \lim_{x\to x_0} Mh(f)$$

Como f es continua en x_0 entonces

$$\lim_{x\to x_0} mh(f) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} Mh(f)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

donde concluimos que

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

□

Corolario 1. *Sea $f:[a.b]\to R$ continua en [a,b]. Entonces $F:[a,b]\to R$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable en [a,b] y $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$*

En otras palabras el teorema fundamental del cálculo dice:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right) = f(x)$$

Ejemplo Usando el teorema fundamental del cálculo (Versión 2) Hallar

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \sqrt{3t^2+5}\ dt\right)$$

Solución Tenemos que

$$\int_x^0 \sqrt{3t^2+5}\ dt = -\int_0^x \sqrt{3t^2+5}\ dt$$

por lo que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \sqrt{3t^2+5}\ dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x \sqrt{3t^2+5}\ dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{3t^2+5}\ dt\right)$$

aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$-\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{3t^2+5}\ dt\right) = -\sqrt{3x^2+5}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \sqrt{3t^2+5}\ dt\right) = -\sqrt{3x^2+5}$$

Ejemplo Usando el teorema fundamental del cálculo (Versión 2) Hallar

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{3x-1}^0 \frac{dt}{t+4}\right)$$

Solución Tenemos que

$$\int_{3x-1}^0 \frac{dt}{t+4} = -\int_0^{3x-1} \frac{dt}{t+4}$$

por lo que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{3x-1}^0 \frac{dt}{t+4}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{3x-1} \frac{dt}{t+4}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^{3x-1} \frac{dt}{t+4}\right)$$

Por otro lado consideramos las funciones

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t+4} \quad y \quad g(x) = 3x-1$$

que al derivarlas y aplicando el teorema fundamental del cálculo (Versión 2) se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{x+4} \quad y \quad g'(x) = 3$$

con estas funciones se tiene

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(3x-1) = \int_0^{3x-1} \frac{dt}{t+4}$$

de manera que

$$-\frac{d}{dx}\left(\int_0^{3x-1}\frac{dt}{t+4}\right)=-\frac{d}{dx}\left(f\circ g(x)\right)=-f'(g(x))\cdot g'(x)=-\frac{1}{(3x-1)+4}\cdot 3=-\frac{1}{x+1}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{3x-1}^{0}\frac{dt}{t+4}\right)=-\frac{1}{x+1}$$