La integral como función del límite superior

Sea $f : [a, b] \to R$ integrable, con base en la función f, podemos construir una nueva función a través de la siguiente regla de correspondencia

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f$$

donde α es una constante fija en [a,b] y x cualquier valor de [a,b]. Para cada $x \in [a, b]$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{x} f$ determina uno y sólo un valor, de esta forma $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es efectivamente una función a esta función se le llama **Integral como límite superior**.

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to R$ integrable, entonces la función $F : [a, b] \to R$ definida por*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x}$$

es continua en [a,b].

Demostración. Vamos a ver que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall x \in [a, b] |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \epsilon$$

Sea $\epsilon > 0$ entonces

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{\alpha}^{x} f - \int_{\alpha}^{x_0} f \right| = \left| \int_{\alpha}^{x} f + \int_{x_0}^{\alpha} f \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f \right| \le \int_{x_0}^{x} |f| \le M \int_{x_0}^{x} dt$$
$$= M(x - x_0) < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Si $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$, estamos considerando ademas que f es acotada. $\square$

Por lo tanto F es continua.

Integral Indefinida

Definición 1. *Una función F es una antiderivada (Primitiva) de una función f sobre un conjunto A si tanto F, f estan definidos sobre A y*

$$\forall\ x \in A, F'(x) = f(x)$$

Definición 2. *Al conjunto de todas las primitivas de una función f se le llama Integral Indefinida y se le denota*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Teorema 2. *Algunas propiedades de la integral indefinida*

$$a) \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx \right)$$

$$b) \quad \int f'(x)dx = f(x) + c$$

Demostración.

$$(a) \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d(F(x)+c)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$$(b) \quad \int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + c$$

□

Teorema 3. *Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

es una antiderivada de $f(x)$ en $[a,b]$

Demostración. Sean $x,\ x+h \in [a,b]$ se tiene entonces que

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt$$

se tiene entonces que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(x^*)h \ \Rightarrow\ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x^*)$$

tomando limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

es decir

$$F'(x) = f(x)$$

□

Ejemplo Según lo anterior

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^x \frac{dt}{1+t^2} + c$$

Ejemplo Según lo anterior

$$\int \sec\ x = \int_a^x \sec\ t\ dt + c$$

Métodos de Integración : CAMBIO DE VARIABLE

Teorema 4. *Supongamos que u es una función diferenciable en* $[a, b]$, u' *es integrable en* $[a, b]$, *y* g *es una función continua en* $u[a, b]$.
Entonces $(g \circ u)u'$ *es integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b (g \circ u)u' = \int_{u(a)}^{u(b)} g$$

Demostración. Supongamos que u es una función diferenciable en $[a, b]$, u' es integrable en $[a, b]$, y g es una función continua en $u[a, b]$.
Entonces $(g \circ u)u'$ es integrable en $[a, b]$. Sea $c = u(a)$ y $d = u(b)$. Como u es continua en $[a, b]$, entonces $u[a, b]$ es un intervalo cerrado al que llamamos I, se tiene entonces que $c, d \in I$. Si g es continua en I, definimos

$$G(x) = \int_c^x g(u)\ du$$

Por el teorema fundamental del cálculo G es diferenciable y $G' = g$ en I.
Consideremos la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h = G \circ u$, se tiene entonces que

$$h'(x) = G'(u(x))u'(x) = g(u(x))u'(x)$$

Dado que la composición de funciones continuas es continua, h es continua en $[a, b]$ y h es una antiderivada de $g(u(x))u'(x)$ y por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b (g \circ u)u' = h(b) - h(a)$$

$$= G(u(b)) - G(u(a))$$

$$\int_c^{u(b)} g - \int_c^{u(a)} g$$

$$= \int_c^{u(b)} g + \int_{u(a)}^{c} g$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} g$$

□

Ejemplo Evaluar

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

Solución Hacemos

$$u(x) = x^2 + \tfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ u'(x) = 2x$$
$$g(x) = \operatorname{sen}\ x$$

Se tiene entonces que

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} g(u(x))\left(\frac{1}{2}\right) u'(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} (g\circ u)(x)u'(x)dx$$

Ahora bien $u(0)=\dfrac{\pi}{2}$ y $u(\sqrt{\pi})=\dfrac{3}{2}\pi$. Tenemos entonces que:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} (g\circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi})} g(u)du = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen}\ u\ du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos\ \frac{3\pi}{2} + \cos\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Teorema 5. *Sean f y g derivables en [a,b] si f' y g' son integrables en [a,b], entonces*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

Demostración. Como f y g son derivables en [a,b], entonces f y g son continuas en [a,b], por tanto f y g son integrables en [a,b] ademas f' y g' son integrables en [a,b], entonces fg', fg y $f'g$ son integrables en [a,b] y

$$(fg)' = f'g + g'f \Rightarrow \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f$$

por otro lado por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b (fg)' = fg(a) - fg(b)$$

por tanto

$$fg(a) - fg(b) = \int_a^b f'g + \int_a^b g'f \Rightarrow fg(a) - fg(b) - \int_a^b f'g = \int_a^b g'f$$

que es la conocida fórmula de integración por partes □

Ejemplo Evaluar

$$\int_2^4 \ln\ x\ dx$$

Solución Hacemos

$$\begin{array}{c} f(x) = \ln\ x \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = dx \ \Rightarrow\ g(x) = x \end{array}$$

Se tiene entonces que

$$\int_2^4 \ln\ x\ dx = 4\ln\ 4 - 2\ln\ 2 - \int_2^4 \left(\frac{1}{x}\right) x\ dx = 4\ln\ 4 - 2\ln\ 2 - 2 = 6\ln\ 2 - 2$$

Ejemplo Evaluar

$$\int_1^3 x^2 \ln\ \sqrt{x}\ dx$$

Solución Tenemos que

$$\int_1^3 x^2 \ln\ \sqrt{x}\ dx = \int_1^3 x^2 \ln\ x^{\frac{1}{2}}\ dx = \int_1^3 \frac{x^2}{2} \ln\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 \ln\ x\ dx$$

Hacemos

$$\begin{array}{c} f(x) = \ln\ x \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^2 \ \Rightarrow\ g(x) = \frac{x^3}{3} \end{array}$$

Se tiene entonces que

$$\frac{1}{2}\int_1^3 x^2 \ln\ x\ dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\ln\ 3 \cdot \frac{3^3}{3} - \ln\ 1 \cdot \frac{1^3}{3}\right) = \frac{9}{2}\ln\ 3 - \frac{13}{9}$$