## Propiedades de la Integral Indefinida

**Teorema 1.** *Si $f(x)$, $g(x)$ tienen antiderivadas en el mismo intervalo y si $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int\ k \cdot (f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\ dx$$

$$\int (k_1 \cdot f_1(x) + k_2 \cdot f_2(x) + \cdots + k_n \cdot f_n(x))\, dx = k_1 \int f_1(x)\ dx + k_2 \int f_2(x)\ dx + \cdots + k_n \int f_n(x)\ dx$$

*Demostración.* Si F es una primitiva de f y G es una primitiva de G, se tiene entonces

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

por lo tanto $F(x) \pm G(x)$ es una antiderivada de $f(x) \pm g(x)$ por lo tanto

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) \pm G(x) + c = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

Ahora bien

$$(kF(x))' = kF'(x), \quad \textit{es} \ \ \textit{decir} \ \ (kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

por lo tanto $kF(x)$ es una antiderivada de $kf(x)$ por lo tanto

$$\int\ k \cdot (f(x))\, dx = kF(x) + c = k \cdot \int f(x)\ dx$$

La parte tres del teorema se prueba aplicando reiteradamente lo anterior. □

**Proposición 1.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f'$ y $g'$ existen y $\int gf'$ también existe entonces $\int fg'$ también existe y además*

$$\int fg' = fg - \int gf'$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(fg - \int gf'\right) = f'g + g'f - \frac{d}{dx}\left(\int gf'\right) = f'g + g'f - gf' = fg'$$

□

**Ejemplo** Usando el método de integración por partes para integrales indefinidas calcular

$$\int xe^x dx$$

**Solución** En este caso

$$\int xe^x dx \underbrace{=}_{f(x)=x,\ g'(x)=e^x\ \Rightarrow\ f'(x)=dx,\quad g(x)=e^x} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Método por partes rápida

Hay muchas integrales que se resuelven utilizando el método de integración por partes aplicándolo varias veces. Ahora veremos un método rápido y sencillo para hacer estas integrales.
Probaremos que

$$\int f\cdot g = (-1)^0 fg_1 + (-1)^1 f'g_2 + \cdots + (-1)^{n-1}f^{n-1}g_n + (-1)^n\int f^n g_n dx$$

donde

$$f^{i+1} = \frac{d}{dx}f^i \quad y \quad g_{i+1} = \int g_i dx$$

La cual es solamente una aplicación sucesiva del método de integración por partes y que probaremos usando inducción

*Demostración.* Si $n=1$ entonces para $\int fg\ dx$ utilizamos el método de integración por partes

$$\int fg\ dx \underbrace{=}_{\substack{u=f,\quad dv=g\ dx\\ du=f',\quad v=\int g\ dx}} u\cdot v - \int v\ du \underbrace{=}_{\substack{u=f\quad dv=g\ dx\\ du=f'dx\quad g_1=v=\int g dx}} (-1)^0 fg_1 + (-1)^1\int f'g_1 dx$$

Si $n=2$ entonces para $\int fg\ dx$ utilizamos el método de integración por partes

$$\int fg\ dx \underbrace{=}_{\substack{u=f\quad dv=g\ dx\\ du=f'dx\quad v=\int g dx}} fg_1 - \int f'g_1 dx \underbrace{=}_{\substack{u=f'\quad dv=g_1\ dx\\ du=f^2dx\quad v=\int g_1=g_2 dx}} fg_1 - f'g_2 + \int f^2 g_2 dx$$

supongamos cierta la fórmula para n=k esto es la hipótesis de inducción

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1}f^{k-1}g_k + (-1)^k\int f^k g_k dx$$

probaremos ahora el resultado para n=k+1, es decir,

$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1}f^{k-1}g_k + (-1)^k f^k g_{k+1} + (-1)^{k+1}\int f^{k+1}g_{k+1}dx$$

Para ello basta con integrar por partes la última integral que aparece en la hipòtesis de inducción:

$$\int f^k g_k dx \underbrace{=}_{\substack{u=f^k\quad dv=g_k\ dx\\ du=f^{k+1}dx\quad v=\int g_k=g_{k+1}dx}} f^k g_{k+1} - \int f^{-k+1}g_{k+1}dx$$

por lo tanto
$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k \int f^k g_k dx =$$
$$fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k \left( f^k g_{k+1} - \int f^{-k+1} g_{k+1} dx \right) =$$
$$\int fg\ dx = fg_1 - f'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{k-1} g_k + (-1)^k f^k g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{k+1} g_{k+1} dx$$

□

Ejemplo.-Calcular $\int x^5 \cos x dx$

Para esto tenemos que

| | | |
|---|---|---|
| $f = x^5$ | $g_1 = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$ | $(-1)^0 f g_1 = x^5 \operatorname{sen} x$ |
| $f' = 5x^4$ | $g_2 = \int g_1 = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$ | $(-1)^1 f' g_2 = (-1)^1 5x^4 (-\cos x) = 5x^4 \cos x$ |
| $f^2 = 20x^3$ | $g_3 = \int g_2 = \int -\cos x dx = -\operatorname{sen} x$ | $(-1)^2 f^2 g_3 = (-1)^2 (20x^3)(-\operatorname{sen} x) = -20x^3 \operatorname{sen} x$ |
| $f^3 = 60x^2$ | $g_4 = \int g_3 = \int -\operatorname{sen} x dx = \cos x$ | $(-1)^3 f^3 g_4 = (-1)^3 (60x^2)(\cos x) = -60x^2 \cos x$ |
| $f^4 = 120x$ | $g_5 = \int g_4 = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$ | $(-1)^4 f^4 g_5 = (-1)^4 (120x)(\operatorname{sen} x) = 120x \operatorname{sen} x$ |
| $f^5 = 120$ | $g_6 = \int g_5 = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$ | $(-1)^5 f^5 g_6 = (-1)^5 (120)(-\cos x) = 120 \cos x$ |

por lo tanto

$$\int x^5 \cos x dx = x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C$$

Este método puede utilizarse cuando el integrando es un producto de la forma

$$x^n \cos x \quad ó \quad x^n \operatorname{sen} x \quad ó \quad x^n e^x$$

Pero no es indispensable que aparezca la función seno o coseno en el producto, basta con que la función que hará el papel de g sea facilmente integrable tantas veces como se requiera.