Criterios de convergencia de las integrales impropias.

Convergencia Absoluta de las integrales impropias (1ra Clase)

Teorema 1. *Supongamos que*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

es una integral impropia tal que

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$$

converge, entonces debe ocurrir que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

converge

Demostración. Supongamos que

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$$

converge, entonces por el criterio de Cauchy

$$\forall\ p,q \geq k(\epsilon) \quad \left|\int_p^q |f(x)|\ dx\right| < \epsilon$$

como $f(x) \geq 0$ entonces

$$\left|\int_p^q f(x)\ dx\right| \leq \int_p^q |f(x)|\ dx < \epsilon$$

es decir $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ k(\epsilon)\ \ \ni\ \ p,q > k(\epsilon)\ \ \ni$

$$\left|\int_p^q f(x)\ dx\right| < \epsilon$$

por lo que según el criterio de Cauchy

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$$

converge □

Ejemplo Mostar que la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}\ 3x}{x^2+1} dx$$

es convergente

Solución En este caso tenemos que

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\text{sen }\ 3x}{x^2+1} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\text{sen }\ 3x|}{x^2+1} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

donde

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto según el criterio de convergencia absoluta

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen }\ 3x}{x^2+1} dx$$

es convergente

Ejemplo Mostar que la integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos\ x^2}{x^2+\cos^2 x} dx$$

es convergente

Solución En este caso tenemos que

$$\int_2^{+\infty} \left| \frac{\cos\ x^2}{x^2+\cos^2 x} \right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{|\cos\ x^2|}{x^2+\cos^2 x} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+\cos^2 x} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

donde

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto según el criterio de convergencia absoluta

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos\ x^2}{x^2+\cos^2 x} dx$$

es convergente

Convergencia Absoluta de las integrales impropias (2da Clase)

Teorema 2. *Supongamos que*

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

es una integral impropia tal que

$$\int_a^b |f(x)|\ dx$$

converge, entonces debe ocurrir que

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

converge

Demostración. Si $a < c < b$ entonces $\forall\ x \in (a, b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

de donde

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

como

$$\int_a^b |f(x)|\ dx$$

converge, entonces

$$\int_a^b 2|f(x)|\ dx$$

y por comparación

$$\int_a^b f(x) + |f(x)|\ dx$$

converge, ahora bien

$$\int_c^b f(x)\ dx = \int_c^b f(x) - |f(x)| + |f(x)| dx = \int_c^b f(x) + |f(x)| dx - \int_c^b |f(x)| dx$$

por lo tanto

$$\lim_{c \to a^+} f(x)\ \ \exists$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

converge $\square$

Ejemplo Use el criterio de convergencia Absoluta para probar que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad es \quad convergente$$

Solución Tenemos que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{c} = 2\sqrt{1} = 2$$

por lo tanto según el criterio de convergencia absoluta

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

es convergente