Función Gamma

Una de las funciones más importantes del análisis es la función Gamma, dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

Lo primero es estudiar la convergencia o divergencia de esta integral, para ello conviene separar la integral como sigue:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

tenemos que si $t > 0$ entonces $0 < e^{-t} < 1$ por lo tanto

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt < \int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 t^{x-1}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{t^x}{x}|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}$$

si $x > 0$ entonces la integral es convergente

Si $x = 0$

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{-1}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}t}$$

como $2 < e^t < 3$ entonces $te^t < 3t$ por lo tanto $\dfrac{1}{3t} < \dfrac{1}{e^t t}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{3t} < \int_0^1 \frac{dt}{e^t t} \quad y \quad como \quad \int_0^1 \frac{dt}{3t} \quad diverge$$

entonces $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dx$ diverge

Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $1 - x > 1$ por lo tanto $t^{1-x} < t \quad \Rightarrow \quad e^{-t}t^{1-x} < e^{-t}t < 3t$ por lo tanto

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt > \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}t} > \int_0^1 \frac{dt}{3t} \quad la \quad cual \quad diverge$$

entonces $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dx$ diverge

Para la segunda integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ examinamos dos casos

1er caso $x \leq 1$

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \int_1^\infty e^{-t}t^{-(1-x)}dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt \qquad como \qquad t \in [0,1] \qquad \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \leq e^{-t}$$

por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_1^\infty e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}|_1^b = -\lim_{b\to\infty} e^{-b} - e^{-1} = \frac{1}{e}$$

de modo que para $0 < x \leq 1$ las integrales convergen y $\Gamma(x)$ converge.
Ahora para $x > 1$ notamos que $e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x+1}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ y hacemos $f(t) = e^{-t}t^{x+1}$
para esta función se tiene

$$f'(x) = (x+1)t^x(e^{-t}) + t^{x+1}(-e^{-t}) \ \Rightarrow\ f' = 0 \ \Leftrightarrow\ (x+1)t^x(e^{-t}) + t^{x+1}(-e^{-t}) = 0 \ \Leftrightarrow e^{-t}t^x(x+1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = x+1$$

por lo tanto

$$\int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \int_1^{\infty} e^{-t}t^{x-1} = \int_1^{\infty} e^{-t}t^{x+1}\left(\frac{1}{t^2}\right) < \int_1^{\infty} (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt = (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{t}\Big|_1^b\right) = (x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}$$

la cual es convergente.
Algunas de las propiedades de la función Gamma

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty}\underbrace{e^{-t}}_{dv=e^{-t}}\underbrace{t^x}_{u=t^x}dt = t^x(-e^{-t})|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\underbrace{-e^{-t}}_{v}\underbrace{-txt^{x-1}}_{du}dt = x\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por inducción para n=0 se tiene

$$\Gamma(n+1) = \Gamma(1) = \int_0^{\infty}e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty}e^{-t}|_1^b = -\lim_{b\to\infty}e^{-b} - 1 = 1 = 0!$$

Suponemos cierto para n=k+1 es decir

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Veamos para n=k+1

$$\Gamma(k+2) = \underbrace{\Gamma(k+1+1)}_{Propiedad \quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} = (k+1)\underbrace{\Gamma(k+1)}_{Hip.\ ind. \quad \Gamma(k+1)=k!} = k+1(k!) = (k+1)!$$

Vamos a calcular el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

hacemos el cambio de variable $x = t^2$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}2t\ dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\ dt$$

Vamos a calcular

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$$

Para esto hacemos

$$J=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$$

Y nos fijamos en

$$J^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\ dy\right)$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

ahora hacemos el cambio de variable $x=yt \ \Rightarrow\ dx=ydt$ y obtenemos

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2-y^2}dx\ dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-y^2(t^2+1)}y\ dy\ dt=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2(t^2+1)}=2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

de manera que

$$J^2=\pi\ \Rightarrow\ J=\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto

$$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2=\pi\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

Podemos ahora calcular algunos valores de la función

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)\underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

Usando la propiedad $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ tenemos que $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ por lo tanto si $-1<x<0$ $\Gamma(x)$ esta bien definido, por ejemplo

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

para valores $x<-1$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi})=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

Este mecanismo recurrente permite concluir que Γ esta bien definida para $\forall\ x<0$ excepto $x \in (Z)$

Ejemplo Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$

Solución tenemos que

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx \underbrace{=}_{x^3=t} \int_0^\infty t^{\frac{1}{6}}e^{-t}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

Ejemplo Calcular $\displaystyle\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx$

Solución tenemos que

$$\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx \underbrace{=}_{x=\frac{t}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6e^{-t}dt=\frac{1}{2^7}\Gamma(7)=\frac{1}{2^7}6!=\frac{45}{8}$$

Ejemplo Calcular $\displaystyle\int_0^\infty x^7e^{-x}dx$

Solución tenemos que

$$\int_0^\infty x^7e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{8-1}e^{-x}dt=\Gamma(8)=7!=5040$$

Ejemplo Calcular $\displaystyle\int_0^\infty x^4e^{-2x}dx$

Solución tenemos que

$$\int_0^\infty x^4e^{-2x}dx \underbrace{=}_{\substack{u=2x\\du=2dx}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{2}\right)^4 e^{-u}\frac{du}{2}=\frac{1}{32}=\int_0^\infty u^4e^{-u}\ du=\left(\frac{1}{32}\right)\Gamma(5)=\frac{3}{4}$$