

Función Beta de Euler

La función Beta de Euler es una expresión de la forma

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Esta función es convergente para valores $p, q \geq 1$ ya que en ellos la integral no es impropia y el integrando es continuo y por tanto integrable

Para valores $p > 0$ y $0 < q < 1$ también es convergente

Para valores $q > 0$ y $0 < p < 1$ también es convergente

La identidad que relaciona la función Gamma con la función Beta es:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Ahora bien si en la función Beta hacemos el cambio de variable $x = \text{Sen}^2 t$ y $dx = 2\text{Sen}t\text{Cost}dt$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\beta(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{Sen}^2 t)^{p-1} (1 - \text{Sen}^2 t)^{q-1} 2\text{Sen}t\text{Cost}dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{Sen}^2 t)^{p-1} \text{Sen}t(\text{Cos}^2 t)^{q-1} \text{Cost}dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^{2p-1} t \text{Cos}^{2q-1} t dt\end{aligned}$$

Vamos a calcular

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^{2(\frac{1}{2})-1} t \text{Cos}^{2(\frac{1}{2})-1} t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^0 t \text{Cos}^0 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

Mientras que

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)} = (\Gamma(\frac{1}{2}))^2$$

Por lo tanto

$$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Podemos ahora calcular algunos valores de la función

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) \underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) \underbrace{=}_{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

Usando la propiedad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ tenemos que $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ por lo tanto si $-1 < x < 0$ $\Gamma(x)$ esta bien definido, por ejemplo

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

para valores $x < -1$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2} + 1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

Este mecanismo recurrente permite concluir que Γ esta bien definida para $\forall x < 0$ excepto $x \in (Z)$

Ejemplo Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^5\theta \text{Cos}^7\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{Sen}^{2(3)-1}\theta \text{Cos}^{2(4)-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta(3, 4) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{1}{2} \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$$

Ejemplo calcular

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^6\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sen}^0\theta \text{Cos}^6\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{Sen}^{2(\frac{1}{2})-1}\theta \text{Cos}^{2(\frac{7}{2})-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{7}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{8}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{15}{2}\sqrt{\pi}}{3!} = \frac{5\pi}{32} \end{aligned}$$

Ejemplo Calcular $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx$ tenemos que

$$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x^3}dx \underbrace{=}_{x^3=t} \int_0^\infty t^{\frac{1}{6}}e^{-t} \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo Calcular $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx$ tenemos que

$$\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx \underbrace{=}_{x=\frac{t}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2^7} \int_0^\infty t^6e^{-t}dt = \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{1}{2^7}6! = \frac{45}{8}$$

