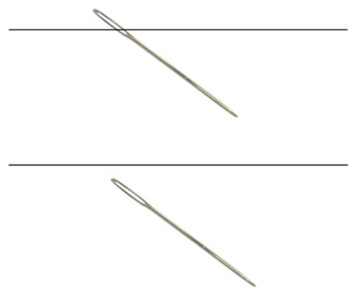
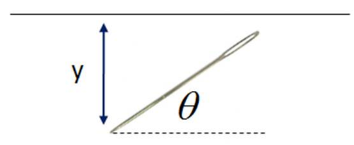
Aguja de Bufon

Problema.-Aguja de buffon: Una aguja de 1 cm de largo es arrojada al azar sobre un piso de tablas. Cada una de 2 cm de ancho. ¿Cual es la probabilidad de que el aguja al caer quede cruzada sobre la hendidura entre las dos tablas?



Sea θ el ángulo que la aguja forma respecto de las líneas de la superfície. Sea Y la distancia a partir del extremo inferior de la aguja hasta la línea que se encuentra al norte del extremo inferior

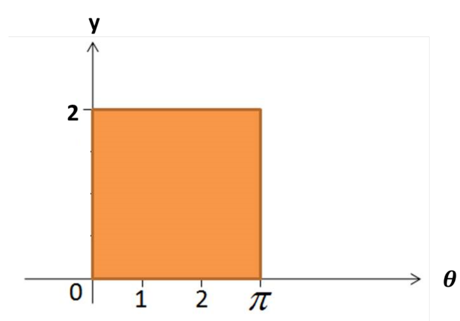


Entonces se tiene que

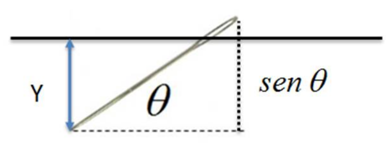
$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq y \leq 2$$

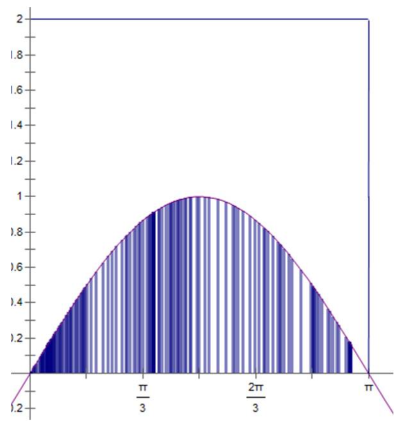
Por lo tanto, todas las posibilidades que tiene la aguja al caer al suelo quedan expresadas en la gráfica



Según lo anterior la aguja cruza una de las lìneas sólo si $y \leq \sin(\theta)$



Es decir si cae dentro de la región marcada



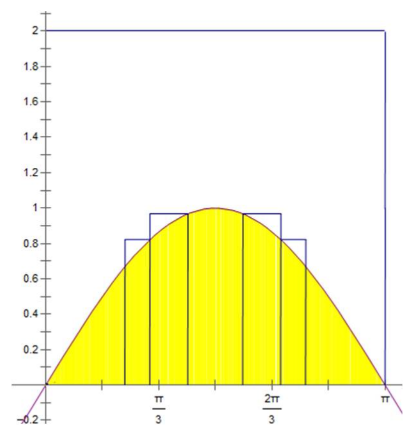
Por tanto la probabilidad de que el aguja cruce la hendidura será

$$P = \frac{\acute{a}rea \quad bajo \quad la \quad curva \quad y = \sin\theta}{\acute{a}rea \quad del \quad rect\acute{a}ngulo \; = \; 2\pi}$$

Calculemos el área de la región rayada. Dividamos el intervalo $[0, \pi]$ en n partes iguales. Construyamos los n rectángulos de base $\frac{\pi}{n}$ y altura $y = \operatorname{sen}(\theta)$ evaluada en el extremo derecho del subintervalo correspondiente. Entonces,

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Vamos a evaluar $S = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$



Tenemos que

$$S=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)=$$

Multiplicamos ambos lados de la desigualdad por $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ y obtenemos

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)S=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)$$

Vamos a trabajar el lado derecho de la igualdad

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right)=$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Usando la identidad trigonométrica $2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)=\cos(b-a)-\cos(a+b)$ obtenemos

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right)$$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{n\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)$$

$\therefore$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)=$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)=$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)$$

$\therefore$

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)S=\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)\Rightarrow S=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

En consecuencia

$$A\approx\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

$\therefore$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Tenemos que

$$\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\left(\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\operatorname{sen}\left(\pi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$\therefore$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}=2$$

Por lo tanto

$$P=\frac{\acute{a}rea\quad bajo\quad la\quad curva\quad y=\sin\theta}{\acute{a}rea\quad del\quad rect\acute{a}ngulo}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$$