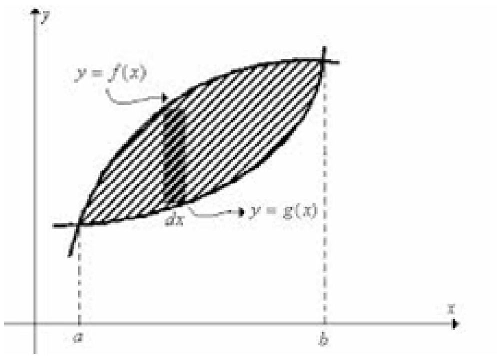
Aplicaciones de la Integral

Cálculo de Áreas de Regiones Planas

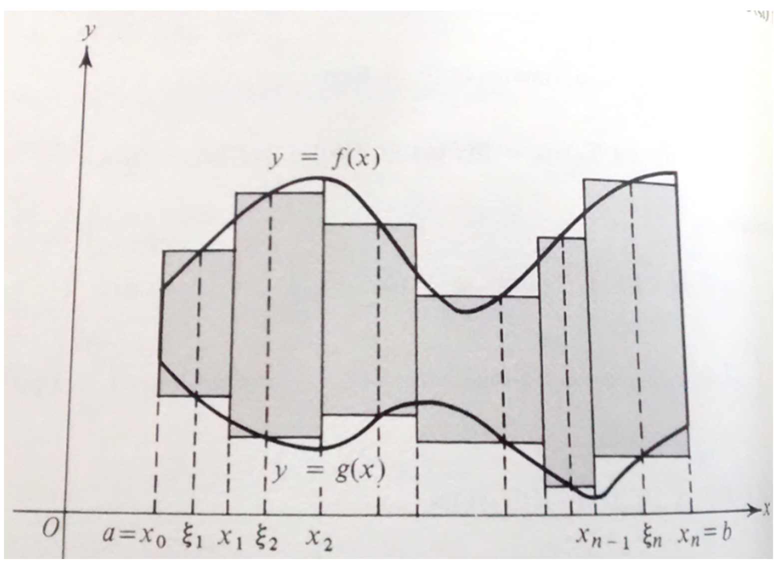
Área de un conjunto limitado por la gráfica de dos funciones

Supongamos que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y la región comprendida entre las gráficas $y = f(x)$, $y = g(x)$ para $x \in [a, b]$. Para calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones f, g



Consideremos una partición $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ de $[a, b]$, entonces una aproximación al área es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{x_i} \quad con \quad \Delta\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad y \quad \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$$



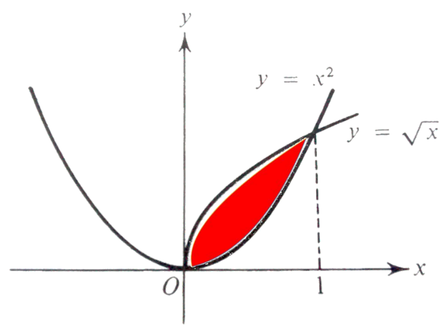
por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{x_i}$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

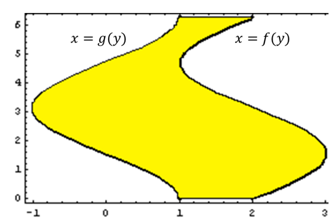
Ejemplo Calcular el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$, donde $\alpha > 1$ en $[0, 1]$



Solución tenemos que

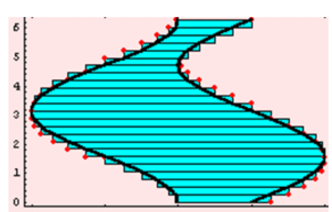
$$A = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Supongamos que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y la región comprendida entre las gráficas $x = f(y)$, $x = g(y)$ para $x \in [a, b]$.



de manera analoga se construye $P = \{c = y_0, y_1, ..., y_n = d\}$ y tenemos que la aproximación es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{y_i} \quad con \quad \Delta\xi_i \in [y_{i-1}, y_i] \quad y \quad \Delta_{y_i} = y_i - y_{i-1}$$



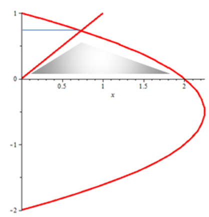
por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_1) - g(\xi_i))\Delta_{y_i}$$

esta última expresión es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A = \int_a^b (f(y) - g(y))dx$$

Ejemplo Calcular el área limitada por $x = 2 - y - y^2$ y $x = y$



Solución En este caso primero tenemos que hallar los puntos de intersección de las gráficas

$$2 - y - y^2 = y \;\Rightarrow\; -2 + 2y + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -1 - \sqrt{3}\;,\; y = -1 + \sqrt{3}$$

por lo tanto

$$A = \int_0^{\sqrt{3}-1}(2-y-y^2-y)dy = \int_0^{\sqrt{3}-1}(2-2y-y^2)dy = 2y-y^2-\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}-2-(3-2\sqrt{3}+1)-(6\sqrt{3}-10)\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$$

Si la gráfica de la función viene dada por las ecuaciones parametricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ se tiene que

$$A = \int_a^b f(x)\ dx \underbrace{=}_{\substack{x=a\ \Rightarrow\ \varphi(t_1)=a \\ x=b\ \Rightarrow\ \varphi(t_2)=b}} \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2}\psi(y)\varphi'(t)dt$$

Ejemplo.-Hallar el área limitada por la gráfica de $[\cos(t), \mathrm{sen}(t)]$ con $t \in [0, 2\pi]$
El área pedida es el área del circulo unidad, es decir si consideramos primero el subconjunto del plano donde $y \geq 0$ se tiene $\varphi(t) = \cos(t)$ y $\psi(t) = \mathrm{sen}(t)$ por tanto

$$A = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{x_1=\varphi(t_1)=-1\ \Rightarrow\ -1=\cos(t_1)\ \Rightarrow\ t_1=\pi \\ x_2=\varphi(t_2)=1\ \Rightarrow\ 1=\cos(t_2)\ \Rightarrow\ t_2=0}} \int_{\pi}^{0}(\mathrm{sen}(t))(-\mathrm{sen}(t))dt = \int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(t)dt$$

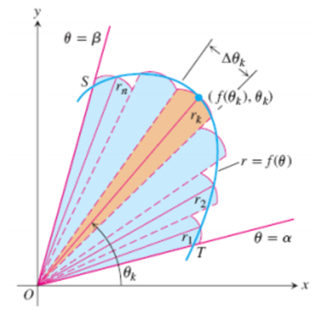
$$= \int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$$

si $y \leq 0$ se tiene

$$A = \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{x_1=\varphi(t_1)=-1 \;\Rightarrow\; -1=\cos(t_1) \;\Rightarrow\; t_1=\pi \\ x_2=\varphi(t_2)=1 \;\Rightarrow\; 1=\cos(t_2) \;\Rightarrow\; t_2=2\pi}} -\int_{\pi}^{2\pi} (\operatorname{sen}(t))(-\operatorname{sen}(t))dt = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)dt$$

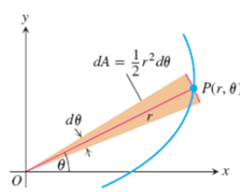
$$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Si la gráfica de la función viene dada en coordenadas polares $r = f(\theta)$ y la región sobre la cual vamos a calcular el área esta limitada por $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ vamos a dar una partición de $[\alpha, \beta]$ $P = \{\theta_0 = \alpha, \theta_1 ..., \theta_n = \beta\}$,



considerando el k-ésimo subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ vamos a aproximar el área por sectores circulares. El área del sector circular determinado por este subintervalo es:

$$A_{sector} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot arco = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)(\theta_k - \theta_{k-1})$$



si sumamos desde 1 hasta n

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2 (\theta_k - \theta_{k-1})$$

haciendo crecer n

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2 (\theta_k - \theta_{k-1})$$

esta última es una suma de Riemann, por lo tanto

$$A = \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta$$

Ejemplo Dada una circunferencia de radio 3 y centro en el origen, determinar el área encerrada por ella a partir de su ecuación polar $r = 3$

Solución Tenemos que

$$A = 4\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3^2 dr = 2\left(9r\left|_0\right|^{\frac{\pi}{2}}\right) = 9\pi$$