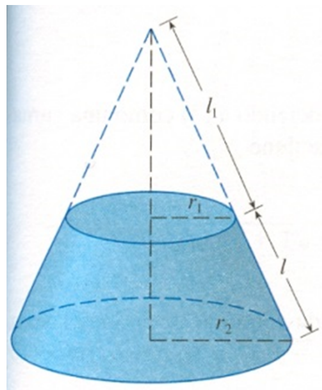
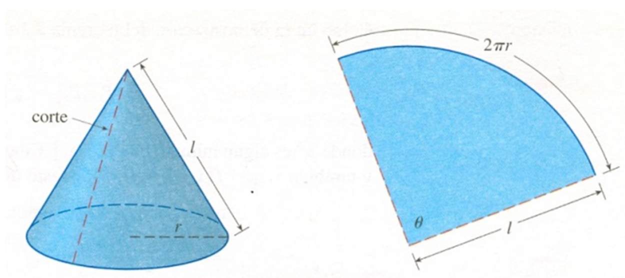
Aplicaciones de la Integral

Cálculo de Áreas de Superficies

Para esto necesitamos primero hallar el área de un cono truncado.
Vamos a considerar el siguiente cono



hacemos un corte y abrimos el cono, nos queda un sector circular



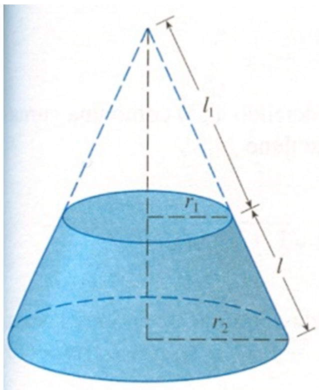
Tenemos que el área de este sector circular es: $A = \dfrac{\ell^2}{2}\theta$

Por otro lado $2\pi r = \ell\theta \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{2\pi r}{\ell}$

por lo tanto

$$A = \frac{\ell^2}{2}\theta = \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{2\pi r}{\ell}\right) = \pi r \ell$$

con esta fórmula vamos a calcular el área del cono truncado



Según la figura
$A_{cono\ chico} = \pi r_1 \ell_1$
$A_{cono\ grande} = \pi r_2(\ell_1 + \ell)$
por lo tanto

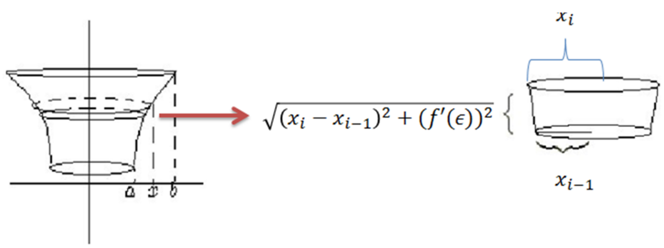
$A_{cono\ trucado} = \pi r_2(\ell_1+\ell) - \pi r_1 \ell_1 = \pi((r_2 - r_1)\ell_1 + r_2 \ell)$

ahora bien por semejanza de triángulos
$\frac{\ell_1 + \ell}{r_2} = \frac{\ell_1}{r_1} \Rightarrow r_2 \ell_1 = r_1 \ell_1 + r_1 \ell \Rightarrow (r_2 - r_1)\ell_1 = r_1 \ell$
por lo tanto

$A_{cono\ trucado} = \pi((r_2 - r_1)\ell_1 + r_2 \ell) = \pi(r_1 + r_2)\ell$

Áreas de Superficies obtenidas al rotar la curva alrededor de eje Y

Ahora consideremos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b]$ y rotemos la gráfica alrededor del eje Y



En este caso el área del cono truncado es:

$$A = \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

aplicando el teorema del valor medio se obtiene

$$A = \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomando la suma

$$A_{superficie} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

por lo tanto

$$A_{superficie} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(x_{i-1} + x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

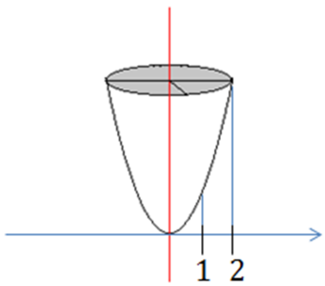
esta última es una suma de riemann, por lo que

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

esta expresión nos proporcionara el área de la superficie obtenida de girar la gráfica de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ respecto al eje Y.

Ejemplo Calcular el área de la superficie obtenida girar la parábola $y = x^2$ alrededor del eje Y de (1,1) a (2,4)

Solución en esta caso



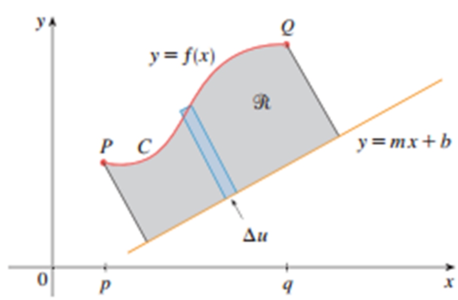
Si se gira en torno al eje Y entonces

$$A = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + (2x)^2}dx =$$

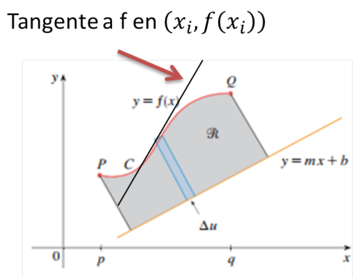
$$2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + 4x^2}dx \underbrace{=}_{\substack{u=1+4x^2 \\ du=8xdx}} \frac{2\pi}{8} \int_5^{17} \sqrt{u}du = \frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$$

Área bajo la gráfica de una función respecto a una recta y=mx+b

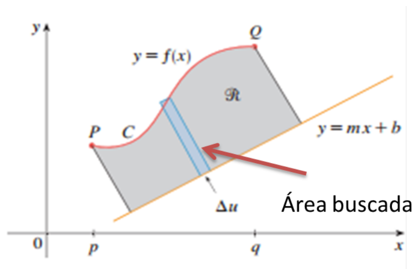
Consideremos la gráfica de la función $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea R la región acotada por la grafica de la función y por la recta $y = mx + b$ entre las perpendiculares a la recta por P y Q



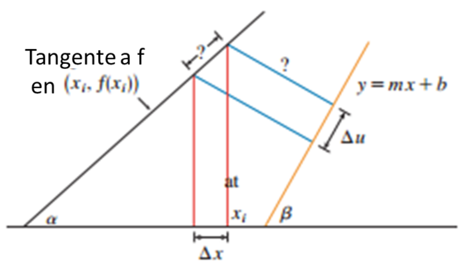
y vamos a encontrar una fórmula que nos proporcione el área de R.
Para esto consideramos la recta tangente a la gráfica de la función en el punto x_i



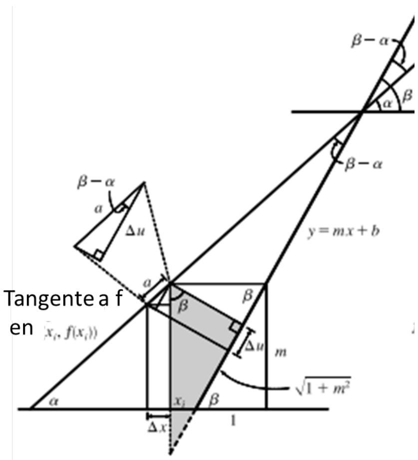
y vamos a encontrar el área del rectángulo entre la tangente y la recta $y = mx + b$



Pare encontrar el área buscada nos fijamos en la parte de la tangente y la recta



se tiene que según la figura



$\tan\alpha = f'(x_i)$ y $\tan\beta = m$, además

$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta x}{\Delta u} \;\Rightarrow\; \Delta u = \frac{\Delta x}{\cos(\alpha)} = \Delta x\ \sec(\alpha)$$

$$= \Delta x\sqrt{1+\tan^2(\alpha)+1} = \Delta x\sqrt{1+(f'(x_i))^2}$$

También

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{\Delta u}{\Delta x\ \sec(\alpha)} = \Delta x\frac{\cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}$$

$$= \Delta x(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\tan\alpha)$$

de las identidades

$$\tan^2\beta + 1 = \sec^2\beta \;\Rightarrow\; \tan^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\beta+1}} \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2} \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Al ser $\tan\alpha = f'(x_i)$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ se tiene que

$$\Delta u = \Delta x(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\tan\alpha) = \Delta x\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}f'(x_i)\right)$$

Ahora solo nos falta encontrar la longitud de la altura del rectángulo
Para esto podemos utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta

$$d((x_i, f(x_i), y = mx+b) = \frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

de esta manera el área del i-ésimo rectángulo es:

$$A_{R_i} = \Delta x\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}f'(x_i)\right)\cdot\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

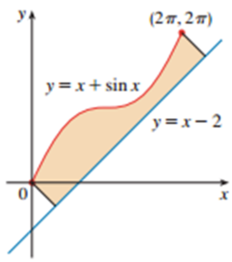
por lo tanto

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta x\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}f'(x_i)\right)\cdot\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

y por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}f'(x_i)\right)\cdot\frac{|f(x_i) - mx_i - b|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{1+m^2}\int_p^q (f(x) - mx - b)(1 + mf'(x))dx$$

Ejemplo Calcular el área limitada por la gràfica de la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ desde $(0, 0)$ hasta (π, π) y la recta $y = x - 2$



En este caso se tiene $m = 1$, $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $mx + b = x - 2$, $p = 0$ y $q = 2\pi$ por tanto

$$A = \frac{1}{1+1^2}\int_0^{2\pi}(x+\operatorname{sen} x-(x-2))(1+1(1+\cos x))dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\cos x+4+2\cos x)dx = 4\pi$$