## Métodos de Integración

### Integración por fracciones parciales

### Caso 2: El denominador es un producto de factores lineales alguno repetido

**Ejemplo** Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$

**Solución** se tiene que en fracciones

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

si multiplicamos por $(x-1)(x+1)^2$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x-1)(x+1)^2\left(\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\right) = (x-1)(x+1)^2\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\right) \Rightarrow$$

$$x^2+2x+3 = A(x+1)^2(x-1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$$

ahora bien en la expresión

$$x^2+2x+3 = A(x+1)^2(x-1) + B(x-1)(x+1) + C(x+1)$$

si hacemos x=1 se obtiene

$$6 = A(4) \ \Rightarrow A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$2 = C(-2) \ \Rightarrow C = -1$$

si hacemos x=0 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$3 = \frac{3}{2} - B + 1 \ \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

**Ejemplo** Calcular $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}dx$

**Solución** Tenemos que

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x^2-2x+1)=(x+1)(x-1)^2$$

y se tiene que en fracciones

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

si multiplicamos por $(x+1)(x-1)^2$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x+1)(x-1)^2\left(\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\right)=(x+1)(x-1)^2\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)\ \Rightarrow$$

$$4x=A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)$$

ahora bien en la expresión

$$4x=A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)$$

si hacemos x=1 se obtiene

$$4=C(2)\ \Rightarrow C=2$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$-4=4A\ \Rightarrow A=-1$$

si hacemos x=0 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$0=1-B\ \Rightarrow B=1$$

por lo tanto

$$\int\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$

$$-\ln|x+1|+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$$

**Ejemplo** Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

**Solución** Tenemos que

$$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$$

y se tiene que en fracciones

$$\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

si multiplicamos por $(x+1)^3$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x+1)^3\left(\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}\right)=(x+1)^3\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}\right)\ \Rightarrow$$

$$x^2=A(x+1)^2+B(x+1)(x+1)+C$$
$$x^2=A(x^2+2x+1)+B(x+1)+C$$
$$x^2=Ax^2+(2A+B)x+A+B+C$$

obtenemos el sistema

$$\begin{gathered}A=1\\2A+B=0\\A+B+C=0\end{gathered}$$

cuya solución es

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=1$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-2\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x+1)^3}=$$

$$\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

Caso 3: El denominador es un producto de factores cuadraticos distintos

**Ejemplo** Calcular $\int \frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}dx$

**Solución** se tiene que en fracciones

$$\frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

si multiplicamos por $(x)(x^2+x+1)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x)(x^2+x+1)\left(\frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}\right) = (x)(x^2+x+1)\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x^2-1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x)$$

Desarrollando

$$x^2-1 = Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx = (A+B)x^2+(A+C)x+A$$

por lo tanto

$$x^2-1 = (A+B)x^2+(A+C)x+A$$

donde obtenemos el sistema de ecuaciones $A+B=1,\ A+C=0$ y $A=-1$ Al resolver se obtiene $A=-1,\ B=2,\ C=1$ por lo tanto

$$\int \frac{x^2-1}{(x)(x^2+x+1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx = -\ln|x| + \ln|x^2+x+1| + C$$

**Ejemplo** Calcular $\int \frac{x^3}{x^4-1}dx$

**Solución** Tenemos que

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

se tiene entonces que en fracciones

$$\frac{x^3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

si multiplicamos por $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x+1)(x-1)(x^2+1)\left(\frac{x^3}{x^4-1}\right) = (x+1)(x-1)(x^2+1)\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x^3 = A(x^2+1)(x+1) + B(x-1)(x^1+1) + (Cx+D)(x^2+1)$$

ahora bien en la expresión

$$x^3 = A(x^2+1)(x+1) + B(x-1)(x^1+1) + (Cx+D)(x^2+1)$$

si hacemos x=1 se obtiene

$$1 = 4A \ \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$-1 = -4B \ \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

si hacemos x=0 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$0 = -D \ \Rightarrow D = 0$$

si hacemos x=2 y tomando los valores hallados para A y B se obtiene

$$8 = 6C + 5 \ \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^3}{x^4-1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$$

**Ejemplo** Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

**Solución** Tenemos que en fracciones

$$\frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

si multiplicamos por $(x+1)^2(x^2+x+1)$ ambos miembros de la igualdad se obtiene

$$(x+1)^2(x^2+x+1)\left(\frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\right) = (x+1)^2(x^2+x+1)\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}\right) \ \Rightarrow$$

$$x^3+2x^2+1 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^1+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2$$

ahora bien en la expresión

$$x^3+2x^2+1 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^1+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 1 = B((-1)^2 + (-1) + 1) \ \Rightarrow 2 = B$$

Por otro lado se tiene

$$x^3+2x^2+1 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^1+x+1) + (Cx+D)(x+1)^2 \ \Rightarrow$$

$$x^3+2x^2+1 = A(x^3+2x^2+2x+1) + B(x^2+x+1) + C(x^3+2x^2+x) + D(x^2+2x+1) \ \Rightarrow$$

$$x^3+2x^2+1 = (A+C)x^3 + (2A+B+2C+D)x^2 + (2A+B+C+2D)x + (A+B+D)$$

se tiene el sistema

$$\begin{gathered} A+C=1 \\ 2A+B+2C+D=2 \\ 2A+B+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \end{gathered}$$

Como $B=2$ se tiene

$$\begin{gathered} A+C=1 \\ 2A+2C+D=0 \\ 2A+C+2D=-2 \\ A+D=-1 \end{gathered}$$

de la primera ecuación $A=1-C$. Sustituimos en las otras tres

$$\begin{gathered} 2(1-C)+2C+D=0 \\ 2(1-C)+C+2D=-2 \\ 1-C+D=-1 \end{gathered}$$

de donde

$$\begin{gathered} 2+D=0 \\ 2-C+2D=-2 \\ -C+D=-2 \end{gathered}$$

De la primera $D=-2$
sustituyendo en la tercera $C=0$
por lo tanto

$$\int \frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx=\int \frac{dx}{x+1}+2\int \frac{dx}{(x+1)^2}-2\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,dx=\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}-2\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Ahora calcularemos

$$2\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,dx$$

para ellos escribimos

$$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

y hacemos el cambio de variable

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\ t \quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\ dt$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \tfrac{dx}{x^2+x+1}\ dx &= \int \tfrac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \int \tfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t\ dt}{\frac{3}{4}\tan^2 t+\frac{3}{4}} \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\int \tfrac{\sec^2 t}{\sec^2 t}\ dt \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}t \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx = \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} - 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

Caso 4: El denominador tiene factores cuadráticos alguno repetido

Si en la descomposición de $\frac{f(x)}{g(x)}$ en fracciones simples tiene en primer lugar factores lineales, entonces aparecerán primero los factores de la forma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

y en segundo lugar, si un factor cuadrático irreducible se repite m-veces, entonces se puede descomponer en una suma de términos de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

donde cada numerador es lineal. Asi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

Ejemplo.- Calcular $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$
tenemos que en fracciones

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

de donde

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8 = A\left((x^2+2x+3)^2\right) + (Bx+C)\left(x^2+2x+3\right)(x+1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$= A\left((x^4+4x^3+10x^2+12x+9)\right) + B\left((x^4+3x^3+5x^2+3x)\right) + C\left((x^3+3x^2+5x+3)\right) + D\left(x^2+x\right)) + E(x+1)$$

$$= (A+B)x^4 + (4A+3B+C)x^3 + (10A+5B+3C+D)x^2 + (12A+3B+5C+D+E)x + 9A+3C+E$$

En la expresión

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

si hacemos x=-1 se obtiene

$$1-4+11-12+8 = A(1-2+3)^2 \ \Rightarrow\ 4 = 4A \ \Rightarrow\ A = 1$$

mientras que en el sistema

$A+B=1 \;\; 4A+3B+C=4 \;\; 10A+5B+3C+D=11 \;\; 12A+3B+5C+D+E=12 \;\; 9A+3C+E=8$

tomando A=1 se tiene

$$A+B=1 \;\Rightarrow\; 1+B=1 \;\Rightarrow\; B=0$$

tomando A=1, B=0

$$4A+3B+C=4 \;\Rightarrow\; 4+C=4 \;\Rightarrow\; C=0$$

tomando A=1, B=0, C=0 se tiene

$$10A+5B+3C+D=11 \;\Rightarrow\; 10+D=11 \;\Rightarrow\; D=1$$

tomando A=1, B=0, C=0, D=1 se tiene

$$12A+3B+5C+D+E=12 \;\Rightarrow\; 12+1+E=12 \;\Rightarrow\; E=-1$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \ln|x+1| + \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

Vamos a calcular $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$ tenemos que

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{x+1-1-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+2x+3} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

Para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$
expresamos el denominador de la siguiente manera

$$(x^2+2x+3)^2 = (x^2+2x+1-1+3)^2 = \left((x+1)^2+2\right)^2$$

por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2} \underbrace{=}_{\substack{x+1=\sqrt{2}\tan t \\ dx=\sqrt{2}\sec^2 t dt}} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{\left((\sqrt{2}\tan t)^2+2\right)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{2^2\sec^4 t} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2 t\; dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\; dt = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}(t\cos t \operatorname{sen} t)$$

tenemos que de la sustitución

$$x+1 = \sqrt{2}\tan t \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{\sqrt{2}} = \tan t \;\Rightarrow\; \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) = t$$

ahora bien
$$\cos t = \cos\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
necesitamos encontrar expresiones para $\operatorname{sen}(\arctan x)$ y $\cos(\arctan x)$ y para ello hacemos $y = \arctan x$ y tenemos que
$$y = \arctan x \;\Rightarrow\; \tan y = x \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = x \;\Rightarrow\; x = \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} \;\Rightarrow\; x\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \operatorname{sen} y$$
$$\Rightarrow\; x^2(1-\operatorname{sen}^2 y) = \operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2 - x^2\operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2 = x^2\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; x^2 = (x^2+1)\operatorname{sen}^2 y$$
$$\Rightarrow\; \frac{x^2}{x^2+1} = \operatorname{sen}^2 y \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{sen} y$$
por lo tanto
$$\operatorname{sen}(\arctan x) = \operatorname{sen} y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
y en consecuencia
$$\cos(\arctan x) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\arctan x)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
sustituimos el valor de t y obtenemos
$$\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) = t \;\Rightarrow\; \cos\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \cos t \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}} = \cos t \;\Rightarrow\; \frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}} = \cos t$$
y también
$$\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) = t \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; \frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}} = \operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \operatorname{sen} t$$
finalmente
$$\frac{\sqrt{2}}{8}(t\cos t\operatorname{sen} t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}}\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)$$
y la integral resulta
$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3} - 2\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+4x+6}}\right)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)$$