Guia para el 4to examen parcial

Definición 1. *Definimos la función*

$$\arcsin\ x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad para \quad -1 < x < 1$$

Ejercicio 1 Demuestre que la función arcsin x satisface
(a) $\arcsin\ (-x) = -\arcsin(x), \quad \forall\ x \in [-1,1]$

Definición 2. *Definimos la función*

$$\arctan\ w = \int_0^w \frac{du}{1+u^2}, \quad para \quad u \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2 Demostrar que

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin(x)$$

Ejercicio 3 Calcular

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)}\ dx$$

Ejercicio 4 Aplicando la sustitución de Euler a la integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}\ dx$$

Hallar una expresión racional de ella

Ejercicio 5 Calcular usando la sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{1+\text{sen}\ x+\cos\ x}$$

Ejercicio 6 Para todo número α, y todo entero no negativo n, definimos el coeficiente binomial

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Demostrar que el polinomio de taylor de grado n para $f(x) = (1+x)^\alpha$ alrededor del cero es

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Demostrar también que el residuo de Cauchy es

$$R_n(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)$$