## Funciones Logaritmo y Exponencial

**Ejercicio** Muestre que $\forall\ b \in \mathbb{R}$ se tiene que $\exists\ a > 0$ tal que

$$\ln\ a = b$$

*Demostración.* Tenemos que $\forall\ b \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b| < n\ \Rightarrow\ -n < b < n\ \Rightarrow\ -n \ln\ 4 < b < n \ln\ 4\ \Rightarrow\ -\ln\ 4^n < b < \ln\ 4^n\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{4^n}\right) < b < \ln\ 4^n$$

por lo tanto como $\ln\ x$ es continua por el teorema del valor intermedio se tiene que existe $a \in \left(\frac{1}{4^n}, 4^n\right)$ tal que

$$\ln\ a = b$$

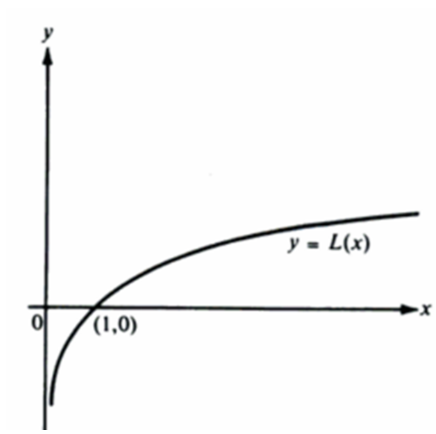
□

**Ejercicio** Mostar que la gráfica de $\ln\ x$ es concava hacia abajo

*Demostración.* Sabemos que un función f es cóncava hacia abajo en I si $f'$ es decreciente en el intervalo. En este caso

$$f(x) = \ln\ x\ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x}\ \Rightarrow\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

como $f''(x) < 0$ se tiene que $f'(x)$ es decreciente por lo tanto la gráfica de $\ln\ x$ es concava hacia abajo




□

**Teorema 1.** *Sea $k \in \mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ satisface $f' = kf$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{kx} \quad donde \quad c = f(0)$$

*Demostración.* Definimos la función $F(x) = \ln\ x$, se tiene entonces

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{kf(x)}{f(x)} = k$$

existe entonce un $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = kx + c \;\Rightarrow\; \ln\ x = kx + c \;\Rightarrow\; f(x) = e^{kx+c} = e^c e^{kx}$$

y si tomamos $x = 0$

$$f(0) = e^c e^{k0} = e^c$$

$\square$

**Ejemplo** Hallar todas las funciones $f(x)$ tal que $f'(x) = 3f(x)$

**Solución** Tenemos que tomando k=3 en el teorema se tiene que

$$f(x) = ce^{3x}, \quad c = constante \neq 0$$

**Ejercicio** Supóngase que $f(x)$ satisface
(1) $f'(x) = f(x)$
(2) $f(x+y) = f(x)f(y)$
Demostrar que $f(x) = e^x$ ó $f(x) = 0$

**Solución**

$$(1) \quad f'(x) = f \;\Rightarrow\; f(x) = ce^x$$

$$(2) \quad f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \quad ó \quad f(0) = 1$$

$$(3) \quad Como \;\; f(x) = ce^x \;\Rightarrow\; f(0) = c = 1 \quad \therefore \quad f(x) = 0 \quad ó \quad f(x) = e^x$$

**Ejercicio** Demostrar que si $f(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

**Solución** Como f es continua se tiene

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

esto quiere decir

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 \quad \ni \quad 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

si $x \in \mathbb{Q}$

$$|f(a)| < \epsilon \quad \forall\ \epsilon > 0 \;\therefore\; f(a) = 0\ \forall\ a \in \mathbb{R} \;\therefore\; f(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio** Demuestre que si $f(x) = g(x)\ \ \forall\ x \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = g(x)\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$

**Solución** Si defino $h(x) = f(x) - g(x)$ entonces $h(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{Q}$ y según lo anterior

$$h(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad es \quad decir \quad f(x) = g(x)\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$$