Ejercicio Demuestre que si f es una función continua que cumple

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad con \quad x, y > 0$$

entonces existe un número c tal que

$$f(x) = cx$$

Demostración. Tenemos que

$$f(x_1 + x_2 + x_3) = f(x_1 + x_2) + f(x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

y continuando este proceso se tiene

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)$$

Si hacemos $f(1) = c$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n-veces}) = \underbrace{f(1) + ... + f(1)}_{n-veces} = nf(1) = cn$$

ahora bien

$$f(x) + f(0) = f(x+0) = f(x) \ \Rightarrow \ f(0) = 0$$

en ese caso

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0 \ \Rightarrow \ f(x) = -f(-x)$$

por lo tanto

$$f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$$

ademas

$$c = f(1) = f\left(n\left(\frac{1}{n}\right)\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

por lo que

$$c = nf\left(\frac{1}{n}\right) \ \Rightarrow \ c\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

también

$$f\left(\frac{1}{-n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -c\left(\frac{1}{n}\right) = c\left(\frac{1}{-n}\right)$$

finalmente

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{m-veces}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m-veces} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = mc\left(\frac{1}{n}\right) = cf\left(\frac{m}{n}\right)$$

por lo tanto

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = c\left(\frac{m}{n}\right)$$

al ser f continua entonces

$$f(x) = cx$$

$\square$

Ejercicio Demostrar que si f es una función continua que satisface

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

entonces

$$f(x) = f(e)\ln\ x$$

Demostración. Hacemos $g(x) = f(e^x)$ y tenemos

$$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y)$$

por tanto $g(x) = cx$ y si hacemos $c = 0$ entonces $f = 0$.
Si $c \neq 0$ tenemos que

$$f(e) = f(e^1) = g(1) = c$$

por otro lado

$$f(e^x) = g(x) = cx \ \Rightarrow\ f(e^x) = f(e)x \ \Rightarrow\ f(x) = f(e)\ln\ x$$

□

Ahora bien

$$c = 0 \ \Rightarrow\ f = 0$$

$$c \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, b > 0 \ \ni\ f(b) = 1$$

con lo que

$$c\ln\ b = 1 \ \Rightarrow\ c = \frac{1}{\ln\ b}$$

y la función se podría ver

$$f(x) = \frac{\ln\ x}{\ln\ b}$$

Definición 1. *Si $b > 0$, $b \neq 1$ y $x > 0$. Definimos*

$$\log_b x = \frac{\ln\ x}{\ln\ b}$$

Ejemplo Demuestre las siguientes fórmulas de cambio de base de logaritmos

$$(a)\quad \log_b x = \log_b a\ \log_a x, \qquad (b)\quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Solución Tenemos que

$$(a)\quad \log_b x = \frac{\ln\ x}{\ln\ b} = \frac{\ln\ x}{\ln\ b}\left(\frac{\ln\ a}{\ln\ a}\right) = \frac{\ln\ a}{\ln\ b}\left(\frac{\ln\ x}{\ln\ b}\right) = \log_b a \log_b x$$

$$(b)\quad \log_b x = \frac{\ln\ x}{\ln\ b}\left(\frac{\ln\ a}{\ln\ a}\right) = \frac{\ln\ x}{\ln\ a}\left(\frac{\ln\ a}{\ln\ b}\right) = \log_a x \frac{1}{\frac{\ln\ b}{\ln\ a}} = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Función Exponencial General

Definición 2. *Si $a > 0$ entonces para cualquier real x definimos*

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

Algunas de sus propiedades
1.-$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

Demostración.

$$\left(a^b\right)^c = e^{c\ln(a^b)} = e^{c\ln(e^{b\ln(a)})} = e^{c(b\ln(a))} = e^{cb\ln(a)} = a^{cb}$$

□

2.-$a^{x+y} = a^x a^y$

Demostración.

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)}e^{y\ln(a)} = a^x a^y$$

□

3.-$a^1 = a$

Demostración.

$$a^1 = e^{1\ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$$

□

4.-$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln\ a$

Demostración.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln\ a^x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln\ a}\right) = e^{x\ln\ a}(\ln\ a) = a^x\ln\ a$$

□

5.-$a^0 = 1$

Demostración.

$$a^0 = e^{0\ln(a)} = e^0 = 1$$

□

6.-$(ab)^x = a^x b^x$

Demostración.

$$(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln\ a+\ln\ b)} = e^{x\ln\ a+x\ln\ b} = e^{x\ln\ a}e^{x\ln\ b} = a^x b^x$$

□

7.-$a^x a^y = a^{x+y}$

Demostración.
$$a^x a^y = e^{x\ln(a)}e^{y\ln(a)} = e^{x(\ln\ a+y\ln\ a)} = e^{(x+y)\ln\ a} = a^{x+y}$$

□

8.-*Si* $a \neq 1$ *entonces* $y = a^x \ \Leftrightarrow\ x = \log_a y$

Demostración. Tenemos que

$$y = a^x = e^{x\ln\ a} \ \Rightarrow\ \ln\ y = \ln\left(e^{x\ln\ a}\right) \ \Rightarrow\ \ln\ y = x\ln\ a \ \Rightarrow\ x = \frac{\ln\ x}{\ln\ a} = \log_a y$$

por otro lado

$$x = \log_a y \ \Rightarrow\ x = \frac{\ln\ y}{\ln\ a} \ \Rightarrow\ x\ln\ a = \ln\ y \ \Rightarrow\ \ln\ a^x = \ln\ y \ \Rightarrow\ a^x = y$$

9.-a^x es creciente

Demostración. Caso (1) $\ln\ a > 0\ \ y\ \ a > 1$.

$$x < y \ \Rightarrow\ x\ln\ a <\ yln\ a \ \Rightarrow\ \ln\ a^x < \ln\ a^y \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\ln\ es\ creciente} \quad a^x < a^y$$

Caso (2) $\ln\ a < 0 \ \Rightarrow\ -\ln\ x > 0$ si $0 < a < 1$

$$x < y \ \Rightarrow\ -x\ln\ a <\ -yln\ a \ \Rightarrow\ -\ln\ a^x < -\ln\ a^y \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\ln\ es\ creciente} \quad a^x < a^y$$

por lo tanto a^x es creciente □

□