Funciones Hiperbólicas

Calculemos $\int \sqrt{x^2-1}dx$ haciendo el cambio de variable $x = Sec(\theta)$ Tenemos que

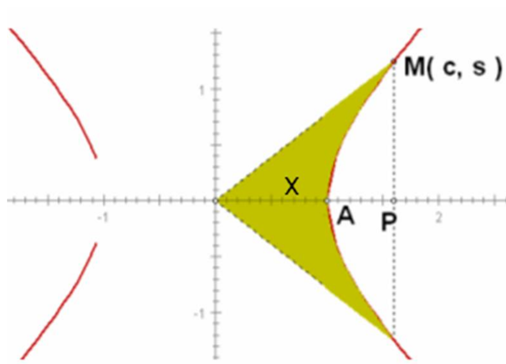
$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \sqrt{Sec^2(\theta)-1}Sec\theta Tan(\theta)d\theta = \int \sqrt{Tan^2(\theta)}Sec(\theta)Tan(\theta)d\theta$$

$$= \int Tan(\theta)Sec(\theta)Tan(\theta)d\theta = \int Tan^2(\theta)Sec(\theta)d\theta = \int (Sec^2(\theta)-1)Sec(\theta)d\theta$$

$$= \int Sec^3(\theta) - Sec(\theta)d\theta = \frac{1}{2}Sec(\theta)Tan(\theta) + \frac{1}{2}Log(Sec(\theta)+Tan(\theta)) - Log(Sec(\theta)+Tan(\theta))$$

$$= \frac{1}{2}Sec(\theta)Tan(\theta) - \frac{1}{2}Log(Sec(\theta)+Tan(\theta)) = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1})$$

En la hipérbola equilatera $x^2 - y^2 = 1$ definimos $c = Cosh(x)$ $s = Senh(x)$ y como c,s estan sobre la hipérbola $c^2 - s^2 = 1$



$$Area = "x" = sc - 2\int_1^c \sqrt{x^2-1}dx = sc - c\sqrt{c^2-1} + Log(c+\sqrt{c^2-1})$$

$$= sc - cs + Log(c+\sqrt{c^2-1}) = Log(c+\sqrt{c^2-1})$$

Por lo tanto

$$x = Log(c+\sqrt{c^2-1}) \Rightarrow e^x = c + \sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^x - c = \sqrt{c^2-1} \Rightarrow e^{2x} - 2e^x c + c^2 = c^2 - 1$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x c = -1 \Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^x c \Rightarrow \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = c \Rightarrow c = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Como $c^2 - s^2 = 1$ entonces

$$s = \sqrt{c^2-1} = \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Definición 1. $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Definimos*

$$\sinh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (Seno\ Hiperbolico)$$

$$\cosh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (Coseno\ Hiperbolico)$$

Según la definición se tiene que

$$\tanh\ x = \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad (Tangente\ Hiperbolica)$$

Ejercicio Demuestre que

$$\cosh^2\ x - \sinh^2\ x = 1$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh^2\ x - \sinh^2\ x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{-2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

□

Ejercicio Demuestre que

$$\sinh\ -x = -\sinh\ x$$

Demostración. Tenemos que

$$\sinh\ -x = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh\ x$$

□

Ejercicio Demuestre que

$$\cosh\ -x = \cosh\ x$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh\ -x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh\ x$$

□

Ejercicio Demuestre que

$$\tanh\ -x = -\tanh\ x$$

Demostración. Tenemos que

$$\tanh\ -x = \frac{\sinh\ -x}{\cosh\ -x} = -\frac{\sinh\ x}{\cosh\ x} = -\tanh\ x$$

□

Ejercicio Demuestre que
$$\sinh\ x+y=\sinh\ x\cosh\ y+\cosh\ x\sinh\ y$$

Demostración. Tenemos que
$$\sinh\ x+y=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}=$$
$$\frac{2e^{x+y}+(e^{x-y}-e^{y-x})-(e^{x-y}-e^{y-x})-2e^{-x-y}}{4}=$$
$$=\left(\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x-y}-e^{y-x}}{4}\right)+\left(\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}\right)=$$
$$\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$
$$\sinh\ x\cosh\ y+\cosh\ x\sinh\ y$$

□

Ejercicio Demuestre que
$$\cosh\ x+y=\cosh\ x\cosh\ y+\sinh\ x\sinh\ y$$

Demostración. Tenemos que
$$\cosh\ x+y=\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2}=\frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}=$$
$$\frac{2e^{x+y}+(e^{x-y}+e^{y-x})-(e^{x-y}+e^{y-x})+2e^{-x-y}}{4}=$$
$$\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$
$$\cosh\ x\cosh\ y+\sinh\ x\sinh\ y$$

□

Ejercicio Demuestre que
$$\sinh\ 2x=2\sinh\ x\cosh\ x$$

Demostración. Tenemos que
$$\sinh\ x+y=\sinh\ x\cosh\ x+\cosh\ x\sinh\ y$$
$$\Rightarrow\ \sinh\ 2x=\sinh\ x+x=\sinh\ x\cosh\ x+\cosh\ x\sinh\ x=2\sinh\ x\cosh\ x$$

□

Ejercicio Demuestre que
$$\cosh\ 2x=\cosh^{2}+x\sinh^{2}\ x$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh\ x+y=\cosh\ x\cosh\ y+\sinh\ x\sinh\ y$$

$$\Rightarrow\quad \cosh\ 2x=\cosh\ x+x=\cosh\ x\cosh\ x+\sinh\ x\sinh\ x=\cosh^2+x\sinh^2\ x$$

$\square$

Ejercicio Demuestre que

$$\cosh\ x+\sinh\ x=e^x$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh\ x+\sinh\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2}=\frac{2e^x}{2}=e^x$$

$\square$

Ejercicio Demuestre que

$$\cosh\ x-\sinh\ x=e^{-x}$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh\ x-\sinh\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}=\frac{2e^{-x}}{2}=e^{-x}$$

$\square$

Ejercicio Demuestre que

$$(\cosh\ x+\sinh\ x)^n=\cosh\ nx+\sinh\ nx,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Demostración. Tenemos que

$$\cosh\ x+\sinh\ x=e^x\ \Rightarrow\ \cosh\ nx+\sinh\ nx=e^{nx}$$

por lo que

$$(\cosh\ x+\sinh\ x)^n=(e^x)^n=e^{nx}=\cosh\ nx+\sinh\ nx$$

$\square$

Ejercicio Demuestre que

$$2\sinh^2\ \frac{x}{2}=\cosh\ x-1$$

Demostración. Tenemos que

$$2\sinh^2\ \frac{x}{2}=2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}}}{2}\right)^2=2\left(\frac{e^x-2+e^{-x}}{4}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1=\cosh\ x-1$$

$\square$

Ejercicio Demuestre que

$$2\cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1$$

Demostración. Tenemos que

$$2\cosh^2 \frac{x}{2} = 2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{e^{x} + 2 + e^{-x}}{4}\right) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + 1 = \cosh x + 1$$

□