Clase del Sabado 16/04/016 ①

Recordando:

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen}^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

1) $\frac{d}{dx}(\text{Sen}^{-1}(x^2)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Recordando

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

) Una particula se mueve a lo largo del eje x, de modo que su posicion en cualquier instante $t \geq 0$ es:

$$x(t) = \tan^{-1}\sqrt{t}.$$

¿Cual es la velocidad de la particula cuando $t=16$?.

$$v(t) = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\sqrt{t} = \frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

Ocupando $u=\sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

Cuando $t=16$.

$$v(16) = \frac{1}{1+16}\left(\frac{1}{2\sqrt{16}}\right) = \frac{1}{17}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{136}.$$

3) $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Sen}^{-1}(x) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \text{Sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

Sea $a = \sqrt{3}$ $\quad u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$= \int \frac{du}{2\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{2} \text{Sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$

6) $\int (\text{Sec}x + \tan x)^2 dx.$

$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$

$= \int (\text{Sec}^2 x + 2\,\text{Sec}x \tan x + \tan^2 x)\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx + 2\int \text{Sec}x \tan x\, dx + \int \tan^2 x\, dx.$

$= \int \sec^2 x\, dx + 2\int \text{Sec}x \tan x\, dx + \int \text{Sec}^2 x\, dx - \int dx.$

$= 2\tan x + 2\,\text{Sec}x - x + C$.

7: $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos(4x)}\, dx.$

Solución:

Tenemos que $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \Rightarrow 2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$

Sustituiremos y haremos un cambio de variable:

$2\theta = 4x$

$\theta = 2x.$

$\Rightarrow 2\cos^2(2x) = 1+\cos(4x).$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos(4x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2(2x)}\, dx$

Sacamos la constante de la integral:

$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2(2x)}\, dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx$

Sea $u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = dx.$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/4} \cos(u)\, du = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Sen} u \Big|_0^{\pi/4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Sen}(2x) \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

8) $\int \sec(x)\, dx$

Solución:

Reescribimos la integral:

$\int \sec(x)\, dx = \int \sec(x)\,(1)\, dx.$

Escribimos $(1) = \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right)$ (4)

Entonces:

$$\int \sec x \,(1)\, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx = \int \left(\frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx$$

ocupando $u = \tan x + \sec x$.

$du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx$.

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C.$$

9) Obtener la formula de reduccion de la siguiente integral:

$$\int \cos^n(x)\, dx.$$

Solucion:

Podemos considerar a $\cos^n(x)$ como:

$$(\cos^{n-1}(x))(\cos(x))$$

Sea:

$u = \cos^{n-1}(x)$

$du = (n-1)\cos^{n-2}(x)\,(-\operatorname{sen} x\, dx)$

$dv = \cos x\, dx$.

$v = \operatorname{sen} x$.

Ocupando integracion por partes tenemos:

$$\int \cos^{n-1}(x)(\cos(x))\, dx = \cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \int (n-1)(\cos^{n-2}(x)\operatorname{sen}^2(x))\, dx.$$

$= \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,\text{Sen}^2(x)\,dx$ ⑤

ocupando $\text{Sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

$= \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\left(1-\cos^2(x)\right)dx$

Abrimos la integral:

$= \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\left[\int \cos^{n-2}(x)\,dx - \int \cos^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx\right]$

$= \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx \underbrace{- (n-1)\int \cos^{n}(x)\,dx}_{①}$

$= \int \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx = \int \cos^n(x)\,dx$

Pasamos (1) del otro lado de la relación.

$$\int \cos^n(x)\,dx + (n-1)\int \cos^n(x)\,dx = \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx$$

$$n\int \cos^n(x)\,dx = \cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\,\text{Sen}(x)}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx$$

La cuál es la fórmula de recurrencia.

10) $\int \cos^3(x)\,dx$.

Solución:

Ocupando la fórmula de reducción:

$$\int \cos^3(x)\,dx = \frac{\cos^2(x)\,\text{Sen}(x)}{3} + \frac{2}{3}\int \cos(x)\,dx$$
$$= \frac{\cos^2(x)\,\text{Sen}(x)}{3} + \frac{2}{3}\,\text{Sen}(x) + C$$

10) $\int \left(\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} \right) dx.$

Hacemos la división:

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ x^2-2x-3 & 2x^3 - 4x^2 - x - 3 \\ & \underline{-2x^3 + 4x^2 + 6x} \\ & 5x - 3 \end{array}$$

Entonces la integral es equivalente a:

$$\int 2x\,dx + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

Tomamos la segunda integral:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx.$$

~~Hagamos~~ Tomamos la fracción y factorizamos el denominador.

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)}.$$

Tomamos el númerador únicamente, ya que el denominador es el mismo, entonces:

$$5x - 3 = (A+B)x + (B-3A)$$

Entonces:

Despejamos B.

$5 = A + B \Rightarrow 5 - A = B \Rightarrow B = 3$

Sustituimos B.

$-3 = B - 3A \Rightarrow -8 = -4A \Rightarrow A = 2$

Entonces tenemos que:

$$2\int x\,dx + \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = 2\int x\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx + 3\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{2x^2}{2} + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C$$

$$= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.$$

11) $\int \operatorname{Sen}^3(x)\operatorname{Cos}^2(x)\,dx.$

Reenscribimos la integral:

$$= \int \operatorname{Sen}^2(x)\operatorname{Sen}(x)\operatorname{Cos}^2(x)\,dx.$$

Como $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \operatorname{Cos}^2(x).$

$$= \int (1-\operatorname{Cos}^2(x))\operatorname{Sen}(x)\operatorname{Cos}^2(x)\,dx.$$

$$= \int (1-\operatorname{Cos}^2(x))\operatorname{Cos}^2(x)\operatorname{Sen}(x)\,dx.$$

Hacemos $u = \operatorname{Cos}(x)$ $\quad du = -\operatorname{Sen}(x)\,dx.$

$$= -\int (1-u^2)u^2\,du = -\int u^2\,du + \int u^4\,du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\operatorname{Cos}(x)^3}{3} + \frac{\operatorname{Cos}^5(x)}{5} + C$$

$$= -\frac{\operatorname{Cos}^3(x)}{3} + \frac{\operatorname{Cos}^5(x)}{5} + C.$$

12) $\int \cos^5(x)\,dx = \int \cos^4(x)\cos(x)\,dx = \int (1-\sin^2(x))^2\cos(x)\,dx$

$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)\,dx$

$= \int (1-u^2)^2\,du = \int (1-2u^2+u^4)\,du$

$= \int du - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$

$= \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \frac{\sin^5(x)}{5} + C$

Demostrar las siguientes relaciones:

13) $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

Solución:

Desarrollamos:

$(\sin(x)+\cos(x))^2 = \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)$

$= (\sin^2(x) + \cos^2(x)) + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

14) $\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x)$

Sabemos que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ --- (B)

Donde $-\cos^2(x) + 1 = \sin^2(x)$ --- (A)

Sustituimos (A) en (B)

$\cos(2x) = \cos^2(x) - (-\cos^2(x) + 1) = \cos^2(x) + \cos^2(x) - 1$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2(x) \Rightarrow \frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x)$

15) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos(t)+1}{2}}$

Ocupando :

$$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x).$$

Hacemos un cambio de variable $2x = t. \Rightarrow x = \frac{t}{2}.$

Sustituimos:

$$\frac{\cos(t)+1}{2} = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Sacamos raiz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{\cos(t)+1}{2}} = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \blacksquare.$$

16) $\frac{\sec^2(t)-1}{\sec^2(t)} = \operatorname{sen}^2(t)$

Descomponemos:

$$\frac{\sec^2(t)-1}{\sec^2(t)} = \frac{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}{\frac{1}{\cos^2(t)}} = \cos^2(t)\left(\frac{1}{\cos^2(t)}-1\right)$$

$$= \frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)} - \cos^2(t) = 1 - \cos^2(t) = \operatorname{sen}^2(t). \quad \blacksquare.$$

Trabajo:

Hacer la siguiente integral por equipos en limpio:

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+4)^2}.$$