Clase 23 de abril.

Integrales trigonométricas y Sustituciones trigonométricas.

Productos de potencias de Senos y Cosenos.

$$\int \operatorname{Sen}^m x \operatorname{Cos}^n x \, dx.$$

donde m y n son enteros no negativos (positivo o cero).

Podemos separar el trabajo en tres casos:

Caso 1.

Si m es impar, escribimos m como $2k+1$ y utilizamos la identidad:

$$\operatorname{Sen}^2 x = 1 - \operatorname{Cos}^2 x.$$

Para obtener:

$$\operatorname{Sen}^m x = \operatorname{Sen}^{2k+1} x = (\operatorname{Sen}^2 x)^k \operatorname{Sen} x = (1 - \operatorname{Cos}^2 x)^k \operatorname{Sen} x$$

después combinamos en la integral el sen x, que está solo, con dx y hacemos sen x dx igual a $-d(\operatorname{Cos} x)$.

Caso 2.

Si m es par y n es impar en $\int \operatorname{Sen}^m x \operatorname{Cos}^n x \, dx$, escribimos n como $2k+1$ y utilizamos:

$$\operatorname{Cos}^2 x = 1 - \operatorname{Sen}^2 x \quad \text{para obtener:}$$

$$\operatorname{Cos}^n x = \operatorname{Cos}^{2k+1} x = ((\operatorname{Cos}^2 x)^k \operatorname{Cos} x = (1 - \operatorname{Sen}^2 x)^k \operatorname{Cos} x$$

Combinamos el cos x, que está solo, con dx, y hacemos $\operatorname{Cos} x \cdot dx$ igual a $d(\operatorname{Sen} x)$.

Caso 3.

Si m y n son pares en $\int \operatorname{Sen} x^m \operatorname{Cos}^n x\, dx$, sustituimos:

$$\operatorname{Sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{Cos} 2x}{2}, \quad \operatorname{Cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{Cos} 2x}{2}.$$

Para reducir el integrando a uno con potencias menores de $\operatorname{Cos} 2x$.

Ejemplos:

1) $\int \operatorname{Sen}^3 x \operatorname{Cos}^2 x\, dx$

Solución:

$$\int \operatorname{Sen}^3 x \operatorname{Cos}^2 x\, dx = \int \operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x \operatorname{Sen} x\, dx = \int (1 - \operatorname{Cos}^2 x) \operatorname{Cos}^2 x (-d(\operatorname{Cos} x))$$

$u = \operatorname{Cos} x \quad du = -\operatorname{Sen} x\, dx.$

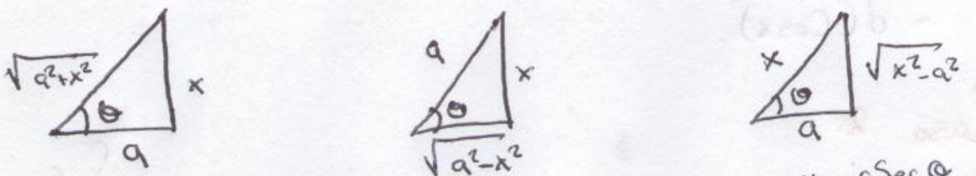
$$= \int (1-u^2)(u^2)(-du) = \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C.$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{Cos}^3 x}{3} + C.$$

Recordatorio:

Los sustituciones más comunes son:

1. $x = a\tan\theta$.
2. $x = a\operatorname{Sen}\theta$.
3. $x = a\operatorname{Sec}\theta$.



$x = a\tan\theta$ $\qquad$ $x = a\operatorname{Sen}\theta$ $\qquad$ $x = a\operatorname{Sec}\theta$

$\sqrt{a^2+x^2} = a|\operatorname{Sec}\theta|$ $\qquad$ $\sqrt{a^2-x^2} = a|\operatorname{Cos}\theta|$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-a^2} = a|\tan\theta|$

Entonces tendremos:

1) $x = a\tan\theta$ requiere $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

2) $x = a\operatorname{Sen}\theta$ requiere $\theta = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

3) $x = a\operatorname{Sec}\theta$ requiere $\theta = \operatorname{Sec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ con $\begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{cases}$

Ejemplo:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Solución:

Hacemos:

$x = 2\tan\theta \quad , \quad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$

$4+x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$

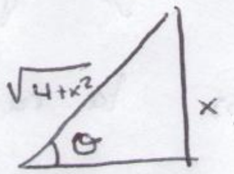
Entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|}$$

ya que $\sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$.

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{x}\right| + C.$$



$x = 2\tan\theta.$

$\tan\theta = \frac{x}{2}.$

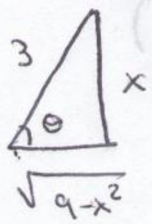
$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$

2) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución:

Hacemos $x = 3\,\text{Sen}\,\theta \quad dx = 3\cos\theta\, d\theta \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

$9 - x^2 = 9 - 9\,\text{sen}^2\theta = 9(1-\text{Sen}^2\theta) = 9\cos^2\theta.$



$\text{Sen}\,\theta = \frac{x}{3}$

$\cos\theta = \sqrt{9-x^2}/3$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\,\text{Sen}^2\theta(3\cos\theta)\,d\theta}{3\cos\theta}$$

$$= 9\int \text{Sen}^2\theta\, d\theta = 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{Sen} 2\theta}{2}\right) + C = I$$

Sabemos que $\operatorname{Sen} 2\theta = 2 \operatorname{Sen}\theta \cos\theta$.

$\Rightarrow$ La integral I es igual a:

$$I = \frac{9}{2}\left(\theta - \operatorname{Sen}\theta \cos\theta\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(\operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{3}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

③ Evaluar: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$ $\quad x > \frac{2}{5}$

Reenscribimos la raiz:

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2-\frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

Para poner la raiz de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$.

Entonces: $x = \frac{2}{5}\sec\theta$ $\quad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$$x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1)$$

$$= \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

Entonces:

$$\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta$$

Con estas sustituciones tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} = \int \frac{\left(\frac{2}{5}\right) \operatorname{sen}\theta \tan\theta d\theta}{5\left(\frac{2}{5}\right)\tan\theta}$$

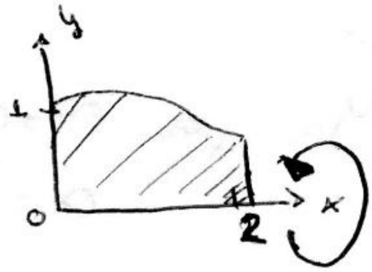
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

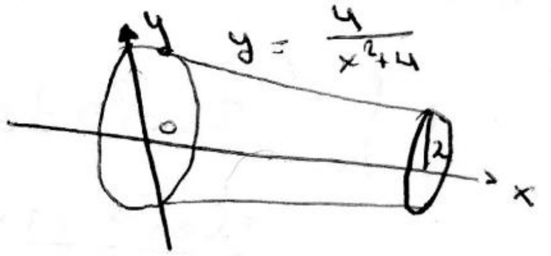
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C$$

4) Encontrar el volumen del sólido que se genera al hacer girar alrededor del eje x, la región acotada por la curva $y = \frac{4}{(x^2+4)}$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Solución.

Hacemos el bosquejo de la región





Tomando el <u>método de los discos</u> donde:

$$V = \int_0^2 \pi [R(x)]^2 dx = 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Donde en este caso:

$$R(x) = \frac{4}{x^2+4}.$$

(Lo que corresponde al curso es resolver la integral de la expresión V.).

=> Para evaluar la integral.

$$16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

Hacemos $x = 2\tan\theta$ $dx = 2\sec^2\theta \, d\theta$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$x^2+4 = 4\tan^2\theta + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

$$\Rightarrow 16\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(4\sec^2\theta)^2}$$

Ya que $\theta = 0$ cuando $x = 0$.
$\theta = \frac{\pi}{4}$ cuando $x = 2$.

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta \, d\theta.$$

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta.$$

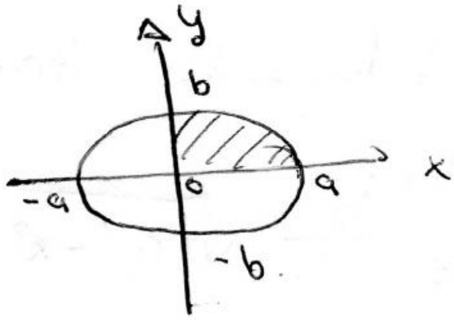
$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \pi \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$= \pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] \approx 4.04$

5) Determine el área de una elipse:

Determine el área acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Solución:

Como la elipse es simétrica, el área total es cuatro veces el área del primer cuadrante.

Entonces tendremos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \Rightarrow$$ De aquí sacamos y.

$$y^2 = b^2 \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} \right)$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

El área de la Elipse es:

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

Hacemos:

$$x = a\,\mathrm{Sen}\,\theta \quad , \quad dx = a\,\mathrm{Cos}\,\theta\, d\theta.$$

$\theta = 0$ cuando $x = 0$

$\theta = \pi/2$ cuando $x = a$.

Sustituyendo tenemos:

$$4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\,\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\,\mathrm{Cos}\,\theta\; a\,\mathrm{Cos}\,\theta\, d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \mathrm{Cos}^2\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \mathrm{Cos}\,2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \frac{\mathrm{Sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right]$$

$$= \pi ab.$$

De aquí tenemos que si $a = b$, tendremos el área de un círculo de radio r el cual es πr^2. [Hacer como ejercicio esto].

(6) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$

Solución:

Hacemos $x = 2\tan\theta$, donde $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$dx = \frac{2\,d\theta}{\cos^2\theta}$

$\sqrt{x^2+4} = \frac{2}{\cos\theta}$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{(8\tan^3\theta)(\cos\theta)\,d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 8\int \frac{\operatorname{Sen}^3\theta\,d\theta}{\cos^4\theta} = 8\int \frac{(\cos^2\theta-1)(-\operatorname{Sen}\theta)\,d\theta}{\cos^4\theta}$$

Hacemos un cambio de variable

$t = \cos\theta$.

$$\Rightarrow \quad 8\int \frac{t^2-1}{t^4}\,dt = 8\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}\right)dt$$

$$= 8\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3}\right) + C$$

$$= 8\left(-\sec\theta + \frac{\sec^3\theta}{3}\right) + C$$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{(x^2+4)^{3/2}}{8\cdot 3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C.$$

7) $\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

Solución.

Sea $w = 2\operatorname{Sen}\theta$, $dw = 2\operatorname{Cos}\theta\, d\theta$.

$\sqrt{4-w^2} = 2\operatorname{Cos}\theta$

Entonces:

$$\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}} = \int \frac{8(2\operatorname{Cos}\theta\, d\theta)}{4\operatorname{Sen}^2\theta\,(2\operatorname{Cos}\theta)}$$

$$= 2\int \frac{d\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta} = -2\operatorname{Cot}\theta + C$$

$$= -2\frac{\sqrt{4-w^2}}{w} + C.$$

<u>Tarea Para el Lunes.</u> [Entrega 1:00 pm - 4:00pm]

- Hacer dos integrales de la lista en equipos de 4 personas en limpio. No se aceptan trabajos en sucio. Además se debe agregar la pregunta que se hizo en los apuntes.

1) $\int_{1/2}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t} + 4t\sqrt{t}}$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

3) $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

4) $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$