

Clase del Sábado

Sabiendo que el área de un círculo unidad 1 es π , es decir:

$$A = \pi (r^2) = \pi (1^2) = \pi$$

Encontrar el área de una elipse a partir de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Donde $A = \pi ab$

Solución.

Tenemos que la ecuación del círculo es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

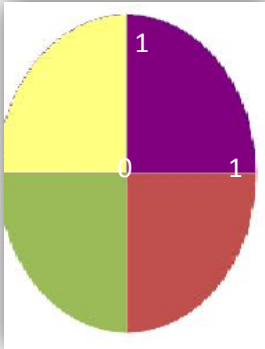
Despejamos y:

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

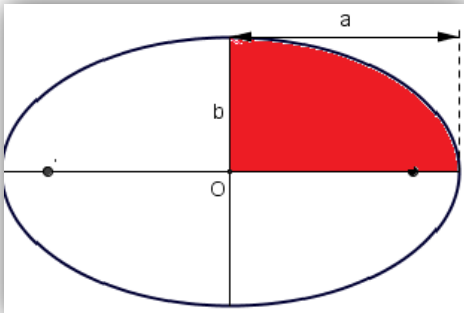
La cual será nuestra función para integrar.

Observando la figura1 notamos que los intervalos van de $[0, a]$, por lo que debemos multiplicar la integral por 4 para tener toda el área del círculo:



$$4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} = \pi$$

Ahora observemos la figura2 de la elipse en donde tenemos un eje mayor y un eje menor.



Despejamos la y de (1):

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Nuevamente multiplicamos la integral por 4 para tener el área completa de la elipse:

$$4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = A$$

Aplicando el teorema del problema 6 de la tarea, vemos que la $c = \frac{1}{a}$, obteniendo:

$$4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} = 4 \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{1 - x^2} = 4 \frac{1}{a} \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{1 - [\frac{x}{a}]^2} = 4 \frac{b}{ab} \int_0^a \sqrt{1 - [\frac{x}{a}]^2} = \pi$$

Entonces:

$$\frac{b}{ab} \int_0^a \sqrt{1 - [\frac{x}{a}]^2} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^a b \sqrt{1 - [\frac{x}{a}]^2} = \frac{\pi ab}{4}$$

Multiplicamos por 4 para tener el área de la elipse completa:

$$4 \int_0^a b \sqrt{1 - [\frac{x}{a}]^2} = \pi ab = A$$

2. Sea $y=f(x)$ una función acotada en $[-1,1]$ y P, P_1 dos particiones de dicho intervalo con $P \subset P_1$.

Responder justificadamente si las siguientes afirmaciones pueden ser verdaderas o son falsas.

a) $L(f, P) = 3$, $S(f, P) = 2$

Es falso ya que:

$$3 = L(f, P) \leq S(f, P) = 2$$

b) $L(f, P) = 3$, $S(f, P) = 6$, $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

Es falso ya que:

$$L(f, P) \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq S(f, P)$$

c) $S(f, P) = 4$, $S(f, P_1) = 5$

Es falsa porque $P \subset P_1$, entonces $S(f, P) \geq S(f, P_1)$

3. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, comparar la cantidad $(b-a)f(b)$ con $\int_a^b f(x)dx$ en los siguientes casos:

a) f constante en $[a,b]$

F es constante, entonces $f(x)=f(b)$ para toda x que está en $[a,b]$.

Integrando miembro a miembro, resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(b)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b)$$

b) f creciente en $[a,b]$

Si f es creciente, $f(x) \leq f(b)$ para toda x que está en $[a,b]$, por la propiedad de monotonía.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(b)dx$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(b)$$

d) f decreciente en $[a,b]$

Si f es decreciente $f(x) \geq f(b)$ para toda x que está en $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b f(b)dx$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f(b)$$

4. Sea f una función integrable y no negativa en $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$, demostrar que $f(x)=0$ en cada punto de continuidad de f .

Solución.

Procederemos a utilizar el método por reducción al absurdo.

Si fuera $f(c) \neq 0$ para algún c que está en (a,b) , donde f es continua , entonces necesariamente tenemos $f(x) > 0$ para toda x que está en $(c-e, c+e)$.

Esto indica que $\int_{c-e}^{c+e} f(x) dx > 0$ lo que contradice la hipótesis de que $\int_a^b f(x) dx = 0$.

5. Probar que la función $f(x)=x$ si x está en los racionales o $f(x)=0$ si x no está en los racionales.

No integrable en $[a,b]$, con $a,b>0$.

Solución.

Debemos ver que las integrales superior e inferior no coinciden.

Consideramos $P=\{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$.

En cualquier sub intervalo (x_{i-1}, x_i) de la partición P hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales, es decir, en (x_{i-1}, x_i) el ínfimo de la función es cero y el supremo es $f(x_i)=x_i$ pues la función , en racionales es creciente en el intervalo.

Tenemos:

$$\text{Integral inferior } (f,P)=\sum_{i=1}^n 0 (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Integral superior } (f,P) &= \sum_{i=1}^n x_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (a + i \frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \right] = \\ &= (b-a) \left(a + \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2n} \right) \right) \end{aligned}$$

La integral inferior es cero y la integral superior es:

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left(a + \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2n} \right) \right) = \frac{(b-a)(b-a)}{2} \neq 0$$

Por lo tanto no es integrable.