a) $\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx$

Hacemos $u=3x$ $\quad du=3dx \Rightarrow \frac{du}{3}=dx$

Checamos los intervalos:

$u(0)=0 \qquad u(\ln 2)=3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

Entonces:

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x}dx = \int_0^{\ln 8} e^u\left(\tfrac{1}{3}\right)du = \tfrac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u du = \tfrac{1}{3}e^u\Big|_0^{\ln 8} = \tfrac{1}{3}(8-1) = \tfrac{7}{3}$$

b) $\int (e^{3x}+5e^{-x})\,dx = \underbrace{\int e^{3x}dx}_{①} + 5\underbrace{\int e^{-x}dx}_{②}$

① Sea $u=3x$, $du=3dx \Rightarrow \frac{du}{3}=dx$ ② $u'=-x$, $du'=-dx \Rightarrow -du'=dx$

$$\Rightarrow \int (e^{3x}+5e^{-x})dx = \int e^u\frac{du}{3} + 5\int e^{u'}(-du') = \tfrac{1}{3}e^u + 5(-e^{u'})+c$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} - 5e^{-x}+c.$$

c) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = e^{\ln 3}-e^{\ln 2} = 3-2=1$

d) $\int_{-\ln 2}^{\ln 3} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{-\ln 2}^{0} = -e^0 + e^{\ln 2} = -1+2=1$

e) $\int e^{\sec(\pi t)}\sec(\pi t)\tan(\pi t)\,dt$

Sea $u=\sec(\pi t)$, $du=\pi\sec(\pi t)\tan(\pi t)\,dt$.

$\Rightarrow \frac{du}{\pi} = \sec(\pi t)\tan(\pi t)\,dt$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int e^u du = \frac{e^u}{\pi}+c = \frac{e^{\sec(\pi t)}}{\pi}+c.$$

f) $\int e^x\cos(x)\,dx$

Sea $u=e^x$, $du=e^x dx$, $dv=\cos(x)$, $v=\text{Sen}\,x$.

$\int e^x\cos(x)dx = e^x\,\text{Sen}\,x - \int \text{Sen}\,x\, e^x dx$

Hacemos otro cambio de variable:

$u=e^x$, $du=e^x dx$, $dv=\text{Sen}\,x\,dx$, $v=-\cos x$.

$\int e^x\,\text{Sen}\,x = -e^x\cos x - \int -\cos x\, e^x dx$.

$\therefore \int e^x\cos(x)dx = e^x\,\text{Sen}\,x + e^x\cos x - \underbrace{\int \cos x\, e^x dx}_{①}$

① Pasamos del otro lado de la relación.

$\Rightarrow 2\int e^x\cos(x)dx = e^x\,\text{Sen}\,x + e^x\cos x + C$

$$\Rightarrow \int e^x\cos(x)dx = \frac{e^x}{2}(\text{Sen}\,x + \cos x)+c.$$

g) Demostrar que para cualquier entero positivo n:

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$$

Solución:

Utilizando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Hacemos: $u = (\ln x)^n$, $du = n(\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x}$, $dv = dx$, $v = x$

$$\Rightarrow \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int x(\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x}$$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx.$$

Aplicación:

Un termistor obedece la ley:

$R(T) = R_0 e^{B/T}$ donde R_0 y β son ctes

Cuando se calibra dicho termistor en el punto triple del H_2O se encuentra una resistencia $R_3 = 938.7\,\Omega$ y en el punto de vapor $R_V = 1055.2\,\Omega$

Hallar la temperatura que mide ese termistor cuando su lectura es $R = 1004.5\,\Omega$

Solución.

Tenemos que plantear el sistema de ecuaciones exponenciales que se nos plantea para calcular la temperatura que nos piden que medirá el termistor:

La temperatura del punto triple del agua es de 273.16 K y en el punto de vapor es de 373.16 K.

Entonces obtendremos:

$$938.7\,\Omega = R_0 e^{\beta/273.16} \quad \text{--- (1)}$$

$$1055.2\,\Omega = R_0 e^{\beta/373.16} \quad \text{--- (2)}$$

Despejamos R_0 en (1):

$$\frac{938.7\,\Omega}{e^{\beta/273.16}} = R_0$$

Sustituimos en (2): $1055.2\,\Omega = \left(\frac{938.7\,\Omega}{e^{\beta/273.16}}\right) e^{\beta/373.16}$

Factorizamos y ponemos de un solo lado las exponenciales:

$$\frac{1055.2}{938.7} = \frac{e^{\beta/373.16}}{e^{\beta/273.16}}$$

Aplicamos logaritmo natural: $\ln\left(\frac{1055.2}{938.7}\right) = \frac{\beta}{373.16} - \frac{\beta}{273.16}$

$$\Rightarrow 0.11698 = \frac{273.16\beta - 373.16\beta}{101932.3886} \Rightarrow 11924.050 = -100\beta$$

$$\therefore \beta = -119.25\,K.$$

Ahora sacamos R_0, sustituyendo el valor de β.

$$R_0 = \frac{938.7}{e^{\frac{-119.25}{273.16}}} = \underline{1452.6\,\Omega}$$

Ahora deducimos la temperatura del termistor sustituyendo las constantes:

$$1064.5 = 1452.6\, e^{-\frac{119.26}{T}}$$

Despejamos T:

$$\frac{1064.5}{1452.6} = e^{-\frac{119.26}{T}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1064.5}{1452.6}\right) = -\frac{119.26}{T}$$

$$\therefore T = -\frac{119.26}{\ln\left(\frac{1064.5}{1452.6}\right)} = \underline{324K}$$

Hacer la siguiente integral:

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\,dx$$

Hagamos:

$u = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$, $dv = dx \Rightarrow v = x.$

$$du = \frac{d(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{dx + d(x^2+a^2)^{1/2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{dx + \frac{d(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$du = \frac{dx + \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]dx}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$du = \frac{\frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx}{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Al sustituir estos valores en la fórmula de la integración por partes obtenemos:

$$\int \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})\,dx = x\ln|(x+\sqrt{x^2+a^2})| - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

En la última integral hagamos:

$w = x^2+a^2 \Rightarrow dw = 2x\,dx \Rightarrow \frac{dw}{2} = x\,dx$

Al sustituir en la última integral:

$$\Rightarrow \int \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\,dx = x\ln|(x+\sqrt{x^2+a^2})| - \int \frac{\frac{dw}{2}}{\sqrt{w}}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \frac{1}{2}\int w^{-1/2}\,dw =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2} + C$$