

## Reordenamientos de Series

**Definición 1.** Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es una serie infinita y  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es una biyección, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$$

es una reordenación de la serie original

**Ejemplo** Dada la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

hallar la reordenación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$$

para  $f(3n+1) = 4n+1$ ,  $f(3n+2) = 4n+3$  y  $f(3n+3) = 2n+2$

**Solución** En este caso

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{f(3(0)+1)} = a_{4(0)+1} = a_1 \\ a_2 &= a_{f(3(0)+2)} = a_{4(0)+3} = a_3 \\ a_3 &= a_{f(3(0)+3)} = a_{2(0)+2} = a_2 \\ a_4 &= a_{f(3(1)+1)} = a_{4(1)+1} = a_5 \\ a_5 &= a_{f(3(1)+2)} = a_{4(1)+3} = a_7 \\ a_6 &= a_{f(3(1)+3)} = a_{2(1)+2} = a_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

es decir de la serie armónica alternada se tienen dos términos positivos seguidos de un término negativo.

**Ejemplo** Dada la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Supongamos que se tienen las siguientes reordenaciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} \dots$$

es decir de la serie armónica alternada se tienen  
un término positivo seguido de dos términos negativos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \cdots$$

es decir de la serie armónica alternada se tienen  
tres términos positivos seguidos de dos términos negativos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \cdots$$

es decir de la serie armónica alternada se tienen  
cuatro términos positivos seguidos de tres términos negativos.

**Ejercicio** Suponga ahora que se tienen  $p$  términos positivos seguidos de  $q$  términos negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdots - \frac{1}{2q}$$

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdots - \frac{1}{2q} + \cdots = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

*Demostración.* tenemos que

$$\begin{aligned} S_{(p+q)n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdots - \frac{1}{2q} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2p} - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdots - \frac{1}{2q} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q}\right) \\ &= \gamma + \ln(2p) - \frac{1}{2}(\gamma + \ln(p)) - \frac{1}{2}(\gamma + \ln(q)) \\ &= \ln(2) + \ln(p) - \frac{1}{2} \ln(p) - \frac{1}{2} \ln(q) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}(\ln(p) - \ln(q)) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

□

Ya probamos que la serie alternada  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ . Ahora vamos a reordenarla y obtendremos diferentes sumas de la misma serie.

Usaremos el resultado probado en clase  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma$  si  $n \rightarrow \infty$

**Ejemplo** Calcular la suma

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

**Solución** para esto consideramos la suma parcial

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} \right) \end{aligned}$$

Ahora si tomamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$  tenemos que

$$\begin{aligned} &= \ln(2n) + \gamma - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \ln(2n) + \gamma - \frac{1}{2} (\ln(n) + \gamma) - \frac{1}{2} (\ln(2n) + \gamma) \\ &\ln(2) + \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Y con la fórmula arriba encontrada con P=1 y Q=2 se tiene

$$\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2} (\ln(1) - \ln(2)) = \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln(2)$$

es decir nuestra fórmula es correcta.

**Ejemplo** Calcular la suma

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

**Solución** para esto consideramos la suma parcial

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

Ahora si tomamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$  tenemos que

$$\begin{aligned} &= \ln(4n) + \gamma - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \ln(4n) + \gamma - \frac{1}{2} (\ln(2n) + \gamma) - \frac{1}{2} (\ln(n) + \gamma) \\ &2 \ln(2) + \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{3}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Y con la fórmula arriba encontrada con P=2 y Q=1 se tiene

$$\ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{1} \right) = \ln(2) + \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{3}{2} \ln(2)$$

es decir nuestra fórmula es correcta.

**Ejemplo** Calcular la suma

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

para esto consideramos la suma parcial

$$\begin{aligned} S_{5n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-4} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6n} \right) - \\ &\quad \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-4} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{3n} \right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \end{aligned}$$

Ahora si tomamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{5n}$  tenemos que

$$\begin{aligned} &= \ln(6n) + \gamma - \frac{1}{2} (\ln(3n) + \gamma) - \frac{1}{2} (\ln(2n) + \gamma) \\ &= \ln(6) + \ln(n) + \gamma - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \ln(2) + \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(2) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(2) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(2)) = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Y con la fórmula arriba encontrada con  $P=3$  y  $Q=1$  se tiene

$$\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

es decir nuestra fórmula es correcta.

**Ejemplo** Calcular la suma

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

para esto consideramos la suma parcial

$$\begin{aligned}
S_{7n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-5} + \frac{1}{8n-3} + \frac{1}{8n-1} - \frac{1}{6n-4} - \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-5} + \frac{1}{8n-3} + \frac{1}{8n-1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6n-4} + \frac{1}{6n-2} - \frac{1}{6n} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-6} + \frac{1}{8n-5} + \frac{1}{8n-4} + \frac{1}{8n-3} + \frac{1}{8n-2} + \frac{1}{8n} - \\
&\quad \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{8n-4} + \frac{1}{8n-2} + \frac{1}{8n} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6n} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-6} + \frac{1}{8n-5} + \frac{1}{8n-4} + \frac{1}{8n-3} + \frac{1}{8n-2} + \frac{1}{8n} - \\
&\quad \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{3n} \right)
\end{aligned}$$

Ahora si tomamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{7n}$  tenemos que

$$= \ln(8n) + \gamma - \frac{1}{2} (\ln(4n) + \gamma) - \frac{1}{2} (\ln(3n) + \gamma)$$

$$\ln(8) + \ln(n) + \gamma - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(3) = \ln(2^3) - \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3) = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

Y con la fórmula arriba encontrada con  $P=4$  y  $Q=3$  se tiene

$$\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2} (\ln(4) - \ln(3)) = \ln(2) + \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3) = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3)$$

es decir nuestra fórmula es correcta.