Serie de Potencias

Definición 1. *A una serie de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ *ó de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n$ *donde* $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ *son constantes se le llama serie de potencias*

Como el cambio de variable $\widehat{x} = x - x_0$, lleva las series del segundo tipo a las primeras, es suficiente trabajar las primeras.
Lo primero que vamos a determinar cual es su dominio de convergencia.

Ejemplo La serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad converge \quad si \quad |x| \leq 1$$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad converge \quad si \quad x = 0$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)x \quad la \quad cual \quad converge \quad si \quad x = 0$$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad converge \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1 \quad por \quad tanto \quad converge \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

Solución Sea

$$a_n = \frac{x^n}{2^n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |x| = \frac{1}{2}|x|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{2}|x| < 1 \ \Leftrightarrow \ |x| < 2 \ \Leftrightarrow \ -2 < x < 2$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x \in (-2, 2)$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}$$

Solución Sea

$$a_n = \frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}}{\frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}} \right| = |x-5| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{4(n+1)} \right| = \frac{1}{4}|x-5|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{4}|x-5| < 1 \iff |x-5| < 4 \iff 1 < x < 9$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x \in (-2, 2)$

Series de Fourier

Una expansión trigonométrica de una función f(x) está dada por una sumatoria o serie del tipo:

$$a_0 + \sum_k a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

Esta serie puede ser finita o infinita.
Las expansiones trigonométricas surgieron en el siglo 18 durante estudios de vibración de cuerdas y otros fenómenos similares pero no fueron tratadas de una manera sistemática sino hasta que, en 1808, Jospeh Fourier escribió "Théorie Analytique de la Chaleur"(Teoría Analítica del Calor), donde realizó un estudio detallado de las series trigonométricas las cuales utilizó para resolver varios problemas relacionados con la conducción de calor. Su trabajo fue controversial en su momento y, aún después de dos siglos, las series de Fourier son importantes, tanto práctica como teóricamente y siguen siendo objeto de investigación.
Una serie de Fourier está dada por:

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

los coeficientes de esta serie estan dados por

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\ dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\ dx$$

Ejemplo Hallar la serie de Fourier para $f(x) = x^2$

Solución Hallamos los coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx \underbrace{=}_{\substack{f=x^2,\quad dg=\cos(kx)\ dx\\ df=2x\ \ dx,\quad g=\frac{\text{sen}(kx)}{k}}} \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x^2\,\text{sen}(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} + \left.\frac{x^2\,\text{sen}(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi\cos(\pi k)}{k^2}\right) = \frac{4\cos(\pi k)}{k^2}$$

Por último, como sabemos que nuestra función es par, entonces sabemos que b_k es cero. Sustituyendo, tenemos que nuestra serie está dada por:

$$S_n(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4\cos(\pi k)}{k^2}\cos(\pi k)$$

Si quisieramos encontrar los 4 primeros términos tendríamos que la serie estaría dada

$$S_4 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cos(\pi)\cos(x) + \frac{1}{4}(4\cos(2\pi)\cos(2x)) + \frac{1}{9}(4\cos(3\pi)\cos(3x))$$

Sabiendo que coseno de cualquier múltiplo par de pi es 1 y de cualquier múltipo non de pi es -1:

$$S_4 = \frac{\pi^2}{-}4\cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9}\cos(3x)$$

En una gráfica podemos ver como la función $f(x) = x^2$ y la serie de fourier para $n = 5$ son muy semejantes