Series

Definición y Ejemplos de Series

Definición 1. *Al sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_1^\infty$ obtenemos una expresión de la forma*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

que se llama serie infinita, o tan solo serie, y se representa con el simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad o \quad bien \quad \sum a_n$$

Para calcular el valor o analizar si tiene un valor examinaremos las sumas parciales
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
.
.
.
$S_n = a_1 + ... + a_n$
Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{S_n\}$ que puede tener límite o no. Si $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = s$ (como número finito), entonces decimos que es la suma de la serie infinita.

Definición 2. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, sea $\{S_n\}$ el simbolo de su n-ésima suma parcial es decir $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y si existe $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ como número real, la serie $\sum a_n$ se llama convergente. El número s se denomina suma de la serie. Si la serie no converge, es divergente.*

Ejemplo. (Serie Geometrica)Tenemos que

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad a \neq 0$$

En este caso se tiene que

$$Si \quad r \neq 1 \quad S_n = a + ... + ar^{n-1} \Rightarrow rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^n$$

$$\Rightarrow Sn - rS_n = a - ar^n \Rightarrow S_n(1-r) = a(1-r^n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Si $|r| < 1$ $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \infty$
y en tal caso la serie diverge.

Ejemplo. Calcula $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ...$ el primer término es 5 y la razon común es $-\frac{2}{3}$ por lo que

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ... = 5(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + ...) = 5\sum_{i=1}^{\infty}(-\frac{2}{3})^{i-1} = \frac{5}{1-(\frac{2}{3})} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

Ejemplo. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ ¿es convergente o divergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4(\frac{4}{3})^{n-1}$$

se trata de una serie geometrica, con a=4 y $r = \frac{4}{3}$ y dado que $\frac{4}{3} > 1$ la serie es divergente.

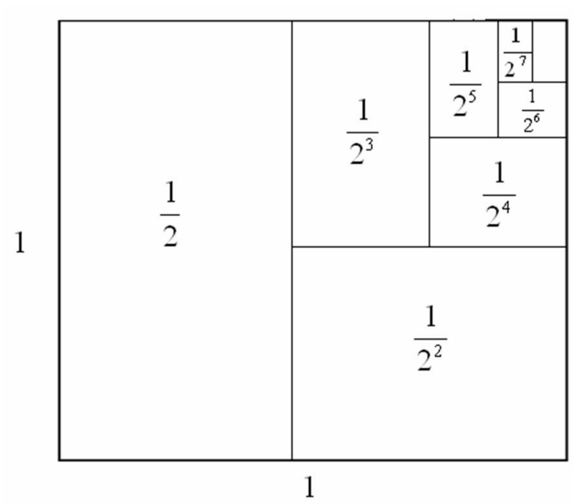
Ejemplo. Escribir el número $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717171717...$ como una relación de números enteros.

Tenemos que

$$2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717171717... = 2{,}3 + \underbrace{\frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + ...}_{Serie \quad geometrica \quad con \quad a=\frac{17}{10^3} \quad y \quad r=\frac{1}{10^2}}$$

$$= 2{,}3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

Observemos ahora la siguiente figura



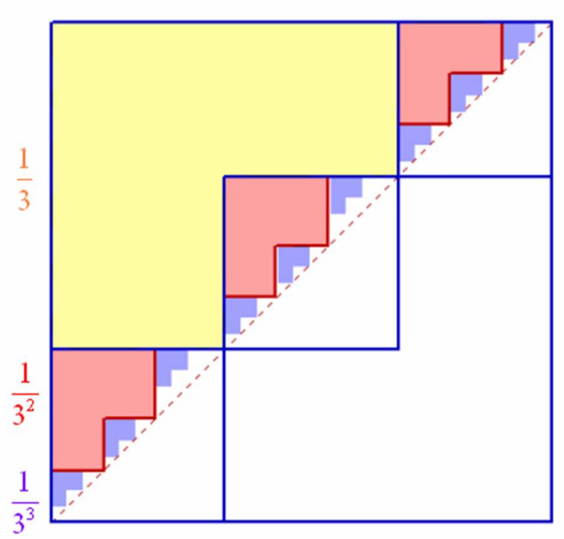
Según la figura

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1$$

Ahora segun nuestra fórmula

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...)=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}(2)=1$$

Observemos ahora



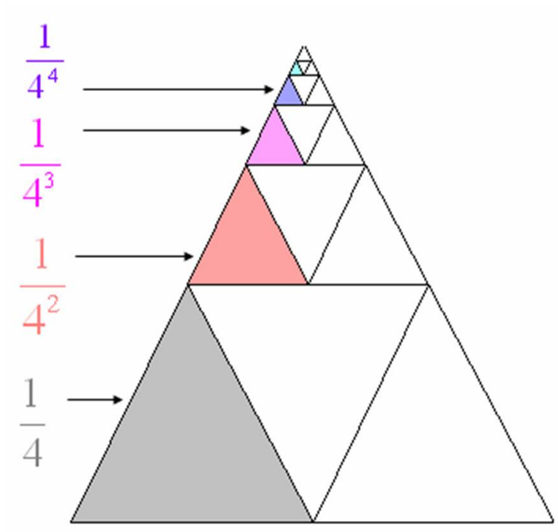
Según la figura

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...=\frac{1}{2}$$

Ahora segun nuestra fórmula

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...)=\frac{1}{3}(\frac{1}{1-\frac{1}{3}})=\frac{1}{3}(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$$

Ejemplo.- Sea el triángulo



cada una de las area representa $\frac{1}{4^n}$ del área total del triángulo por lo que según el dibujo $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+...=\frac{1}{3}$ del area del triángulo original, ahora comprobemoslo con series, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4^n})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3} \quad restamos \quad 1 \quad \frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

se resta 1 pues la serie geometrica debe comenzar en 1 y en nuestro ejemplo no comienza en 1.

Teorema 1. *Prueba del término general Si $\sum a_n$ converge entonces $a_n \to 0$. Equivalentemente si $a_n \not\to 0$ entonces $\sum a_n$ diverge*

Demostración. Supongamos que $\sum a_n$ converge a S. Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ entonces $S_n \to S$.

Notemos que

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

por lo que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}-S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}-\lim_{n\to\infty} S_n=0-0=0$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

□

Ejemplo.-La serie $\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{5n+11}$ es divergente pues

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+11}=\frac{1}{5}\neq 0$$

La condición del término general es necesaria pero no suficiente.

Serie Armonica

Ejemplo.- La serie $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}$ conocida como la Serie Armonica cumple

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

pero dicha serie es divergente, para comprobarlo vamos a ver como se comportan las sumas parciales

$$S_1=1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

$$S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

$$S_7=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$

...

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$$

De los términos anteriores vamos solo a considerar los S_{2^n}, es decir

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

...

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\frac{1}{2^n}>1+\frac{n}{2}=\frac{n+2}{2}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}S_{2^n}>\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2}=\infty$$

Por lo que S_n tiene una subsucesion que al no estar acotada es divergente, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad es \quad divergente$$

Series Telescópicas

Dada una sucesión $\{a_n\}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$ es llamada serie telescópica debido a la naturaleza telescópica (o colapsada) de sus sumas parciales, entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

por lo tanto, una serie telescópica converge si y sólo si la sucesión $\{a_n\}$ converge

Ejemplos.- Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Sol. lo que vamos hacer primero es expresar a_n como una diferencias de sucesiones $b_{n+1} - n_n$, en este caso tenemos que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n \underbrace{=}_{*} \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

*

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$S_n = S_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Ejemplo.-Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ Tenemos que

Por un lado
$$\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$
Por otro lado
$$\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}-\frac{n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2\cancel{(n+1)^2}}-\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
Por lo tanto
$$a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$
así tenemos que:
$$s_1=1-\frac{1}{4}$$
$$s_2=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$$
$$s_3=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}$$
...
$$S_n=1-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{16}}+...+\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)^2}=1$$
Por lo tanto
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{(n+1)^2}=1$$
Ejemplo.-Calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ Tenemos que

Por un lado
$$\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{(2n+1)}(2n-1)}-\frac{\cancel{2n-1}}{(2n+1)\cancel{(2n-1)}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$
Por otro lado
$$\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$$
asi
$$\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Rightarrow\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
Por lo tanto
$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
así tenemos que:
$$s_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

...

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + ... + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo.-Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ Tenemos que

Por un lado

$$\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{\cancel{3n+1}}{\cancel{(3n+1)}(3n-2)} - \frac{\cancel{3n-2}}{(3n+1)\cancel{(3n-2)}} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}$$

Por otro lado

$$\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{(3n+1)-(3n-2)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{3}{(3n+1)(3n-2)}$$

asi

$$\frac{3}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \Rightarrow \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

así tenemos que:

$$s_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right)$$

...

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + ... + \cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}$$

Ejemplo.-Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)(n+3)}$

Tenemos que

Por un lado

$$\frac{(n+3)-(n)}{(n)(n+3)} = \frac{\cancel{n+3}}{\cancel{(n+3)}(n)} - \frac{\cancel{n}}{(n+3)\cancel{(n)}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

Por otro lado

$$\frac{(n+3)-(n)}{(n)(n+3)} = \frac{n+3-n}{(n)(n+3)} = \frac{3}{(n)(n+3)}$$

asi

$$\frac{3}{(n)(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \Rightarrow \frac{1}{(n)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{(n)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

así tenemos que:

$$s_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$s_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

$$s_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$s_4 = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7}\right)$$

$$s_5 = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7} + \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{8}\right)$$

...

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{8}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{11}{8}$$