Se sabe que cada número real x positivo tiene una expresión decimal de la forma

$$x = a_0.a_1a_2a_3...$$

donde $0 \leq a_k \leq 9$ para $k \geq 1$.
El número x esta relacionado con los digitos $a_1,\ a_2,\ a_3,...$ por medio de las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

Si proponemos

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

y se resta a cada miembro de la desigualdad anterior se obtiene

$$0 \leq x - S_n < 10^{-n}$$

por lo que cuando $n \to \infty$ entonces $x \to S_n$
Por lo tanto x esta dado por la serie

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Ejemplo Expresar cada decimal como una serie infinita, hallar la suma de la serie y con ello expresar x como un cociente de enteros.
(a) $x = 0{,}4444...$
(b) $x = 0{,}51515151...$
(c) $x = 2{,}020202...$

Solución Para (a)

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{10^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{10^k} - 4 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{10}\right)^k - 4 \\ &= 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) - 4 \\ &= 4\left(\frac{10}{9}\right) - 4 \\ &= 4\left(\frac{10}{9} - 1\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{9}$$

Para (b)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{51}{100^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{51}{100^k} - 51$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{51}{100}\right)^k - 51$$

$$= 51 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right) - 51$$

$$= 51 \left(\frac{100}{99}\right) - 51$$

$$= 51 \left(\frac{100}{99} - 1\right)$$

$$= 51 \left(\frac{1}{99}\right)$$

$$= \frac{51}{99}$$

Para (c)

$$x = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{100^k}$$

$$= 2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{}{100^k} - 2$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k$$

$$= 51 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right)$$

$$= 2 \left(\frac{100}{99}\right)$$

$$= \frac{200}{99}$$

Criterios de Convergencia de Series

Teorema 1. .- *Criterio de Acotación Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tiene términos no negativos, converge si, y solo si, la sucesión de sumas parciales es acotada.*

Demostración. La sucesión de sumas parciales es no decreciente y de aqui que tiene limite si, la sucesión es acotada. □

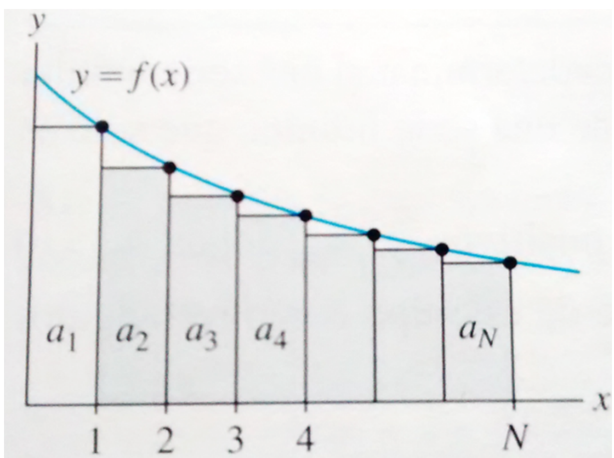
Esta condición es necesaria pero no suficiente

Ejemplo.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ no converge pues $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1} \nexists$

sin embargo la sucesión de sumas parciales es acotada.

Teorema 2. *Criterio de la integral Supóngase que f es una función positiva y decreciente en $[1,\infty)$, y que $f(n) = a_n \ \forall\ n$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge. Si la integral diverge, la serie diverge*

Demostración. Como $f(x)$ es descreciente, los rectángulos sombreados de la figura quedan por debajo de la gráfica de $f(x)$ y,



por lo tanto para todo N:

$$a_1 + a_2 + ... + a_N \leq \int_1^N f(x)\ dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\ dx$$

si la integral impropia de la derecha converge, entonces la suma

$$a_1 + a_2 + ... + a_N$$

esta acotada. En tal caso S_N también está acotada y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge según el criterio de acotación $\square$

Ejemplo Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$$

Solución En este caso hacemos

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

se tiene que

$$f'(x) = \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3} < 0, \quad si \;\; x \geq 1$$

por lo tanto podemos aplicar el criterio de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \underbrace{=}_{\substack{u=x^2+1 \\ dx=2x \;\; dx}} \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \int_2^b \frac{du}{u^2}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left. \frac{-1}{2u} \right|_2^b = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{4}$$

La integral es convergente. Por tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$$

también es convergente