Teorema 1. *Criterio de la forma límite de la prueba de comparación Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tiene términos positivos y si* $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ *entonces ambas series divergen o bien ambas series convergen*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ por tanto existe un N tal que $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \epsilon$ para $n > N$ por lo tanto

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + L < \frac{a_n}{b_n} < \epsilon + L$$

$$\Rightarrow (-\epsilon + L)b_n < a_n < (\epsilon + L)b_n \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty}(-\epsilon + L)b_n < \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty}(\epsilon + L)b_n$$

Por lo tanto por el criterio de comparación la convergencia de $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ implica la convergencia $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la divergencia de $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ implica la divergencia de $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ □

Observación: Las series anteriores empiezan en $n = N$, pero esto no afecta la convergencia o divergencia de las series pues solo se omiten un número finito de ellos.

Ejemplo Examinaremos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ Tenemos que

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n(2n+1)}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n(2n+1)}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2n+1}{n}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < \infty$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$ diverge

Teorema 2. *Criterio de la Razón Supóngase que para algún* $r < 1$ *y* $\forall n > N$ $a_n > 0$ *y* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente*

Demostración. Tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \Rightarrow a_{n+1} \leq r a_n \Rightarrow a_{n+2} \leq r a_{n+1} \leq r \times r a_n = r^2 a_n \quad \textit{por} \quad \textit{lo} \quad \textit{que} \quad a_{n+k} \leq r^k a_n$$

por tanto

$$\sum_{n=N}^{N+k} a_n = a_N + a_N r + ... + a_N r^k < a_N(1 + r + r^2 + ... + r^k + ...) = \frac{a_N}{1 - r}$$

por lo que las sumas parciales de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ estan acotadas por $\sum\limits_{n=1}^{N-1} a_n + \dfrac{a_N}{1-r}$ por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} = r > 1$ entonces tomamos un $1 < s < r$ para el cual existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq s \ \forall \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \geq s a_n \ \forall \ n > n_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} \geq s a_{n+1} = s(s a_n) = s^2 a_n \ \forall \ n > n_0$$

de esta forma

$$a_{n+k} \geq a_N s^k \geq a_N$$

esto quiere decir que los términos $a_n \not\to 0$ por lo tanto la serie es divergente

Para el caso $r = 1$ vamos a mostrar con un ejemplo que el criterio no proporciona información.

Para las serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ Se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$$

Para le serie y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$$

en el primer caso ya hemos probado que la serie diverge, y para el segundo caso ya hemos probado que la serie converge por lo tanto si $r = 1$ el criterio no decide sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Ejemplo Determinar el caracter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)}{3^{n+1}n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto $r = \dfrac{1}{3} < 1$ por lo tanto la serie converge.

Ejemplo Determinar el caracter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{9^n}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{9^{n+1}}}{\frac{n!}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n(n+1)!}{9^{n+1}n!} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} (n+1) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$$

por lo tanto la serie diverge.

Criterio de la integral La siguiente prueba llamada **prueba de la integral**, también es una prueba del tipo comparación pero en este caso la comparación se realiza entre una integral y una serie, en lugar de entre dos series.

Teorema 3. *Criterio de la integral Supóngase que f es una función positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y que $f(n) = a_n \ \ \forall\ n$. Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ converge. Si la integral diverge, la serie diverge*

Demostración. Supongamos que existe la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$. Como

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \quad \forall \ \ n \geq 2$$

si la integral es convergente, se cumple

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

lo que significa que la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales está acotada, es decir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\ dx$ es divergente, para $n \geq 1$ se cumple:

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx$$

es decir

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty$$

entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente □

Ejemplo Analizar la convergencia o divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Vamos a considerar la funcion $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ que es una función decreciente y una partición $P = \{a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_n = n\}$ por lo que podemos comparar la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}$ con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$. por lo que

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^k}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{1}{x^k}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-k+1}}{-k+1}|_1^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k-1}}(\frac{1}{k+1})-\frac{1}{k+1}$$

la cual converge si $k-1>0\Rightarrow k>1$

y diverge si $k-1<0\Rightarrow k<1$

Teorema 4. *Criterio de la Raíz o de Cauchy*

Sea α *tal que* $0<\alpha<1$. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *es tal que* $\sqrt[n]{a_n}\leq\alpha\quad\forall\ n\geq p$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge*

Demostración.

$$Si\quad\forall\ n\geq p\quad\sqrt[n]{a_n}\leq\alpha\ \Rightarrow\ a_n\leq\alpha^n\ \Rightarrow\ \sum_{n=p}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=p}^{\infty}\alpha^n$$

como $\sum_{n=p}^{\infty}\alpha^n$ converge entonces $\sum_{n=p}^{\infty}a_n$ converge, solo añadimos los $p-1$ términos faltantes, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente

Ahora bien si $\forall\ n\geq p$ se tiene que $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\ \rightarrow\ \sum_{n=p}^{\infty}a_n\ \ diverge$$

agregando los $p-1$ términos faltantes se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es divergente

$\square$

Ejemplo Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ es convergente

para esto se tiene que

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n}=\frac{2n+3}{3n+2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}<1$$

por lo tanto la serie converge según el criterio de la raíz