Series Alternantes

Definición 1. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos, entonces ambas series*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$$

son llamadas series alternantes es decir una serie alternante es una serie es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos por ejemplo

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}$$

Teorema 1. *Prueba de la Serie Alternante Si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+b_5-b_6+\ldots \quad (b_n)>0$$

cumple con lo siguiente:

$$a) \quad b_{n+1}\leq b_n$$

$$b) \quad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$$

converge

Demostración. fijemonos en las sumas parciales pares e impares de la serie

Pares

$$S_2=b_1-b_2\geq 0$$

$$S_4=S_2+b_3-b_4\geq S_2$$

$$S_6=S_4+b_5-b_6\geq S_4$$

En general $\quad S_{2n+2}=S_{2n}+b_{2n+1}-b_{2n}\geq S_{2n}$

también $\quad S_{2n}=S_{2n-1}-b_{2n}\leq S_{2n-1}$

Impares

$$S_1=b_1\geq 0$$

$$S_3=S_2+b_3\geq S_2 \quad y \quad S_3=b_1-b_2+b_3=b_1-(b_2-b_3)\leq S_1$$

$$S_5=S_4+b_5\geq S_4 \quad y \quad S_5=S_3-(b_4-b_5)\leq S_3$$

En general $\quad S_{2n+1}=S_{2n}+b_{2n+1}\geq S_{2n}$

también $\quad S_{2n+3}=S_{2n+1}-b_{2n+2}+b_{2n+3}\geq S_{2n+1}$

Por lo tanto

$$S_2\leq S_4\leq S_6\leq \ldots\leq S_{2n}$$

$$S_1\geq S_3\geq S_5\geq\cdots\geq A_{2n+1}$$

vamos a comprobar que $S_k \leq S_\ell$, si k es par y ℓ es impar.
Para ello tomamos $k \leq 2n$ y $\ell \leq 2n-1$ y tenemos que

$$S_k \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_\ell \;\Rightarrow\; S_k \leq S_\ell$$

ahora bien

$$S_{2n} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots + b_{2n-1} - b_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-1} - b_{2n})$$

todos los términos entre paréntesis son positivos, de modo que $S_{2n} \leq b_1\ \forall n$ por lo tanto las sumas parciales se incrementan y estan acotadas superiormente por lo tanto convergen, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = S + 0 = S$$

por lo tanto la serie es convergente $\square$

Ejemplo.-Probar que la serie $1 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}$ es convergente
Para esto usamos la desigualdad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ y a partir de ahi tenemos

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \;\Rightarrow\; n < \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < n+1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

lo que quiere decir que la sucesión de valores absolutos es decreciente.
Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0$$

Por el criterio de leibniz, le serie converge.

Ejemplo Vamos a probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5n+2}$$

es convergente

Solución En este podemos definir la función

$$f(x) = \frac{1}{n^2+5n+2} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{2x+5}{(n^2+5n+2)^2} < 0, \quad si \quad x \geq 1$$

de manera que $f(x)$ es decreciente.
POr otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5n+2} = 0$$

asi que por el criterio de serie alternante, la srie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5n+2}$$

es convergente

Ejemplo -Vamos a probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ conocida como la serie armonica alternante, converge a $\ln(2)$

Solución *Demostración.* Ya mostramos que la serie

$$1-\ln 2+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\ln\frac{4}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}$$

es convergente
Por otro lado se tiene que

$$1-\ln 2+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\ln\frac{4}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-(\ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln(n)-\ln(n-1))$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)$$

Consideramos la sucesión $\gamma_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)$
Como es convergente se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$$

este número es conocido como la constante de Euler y tiene un valor aproximado de 0,5772156649 esto lo podemos poner

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma \quad si \quad n\to\infty$$

ahora bien regresando al problema de la serie alternante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ consideremos la sumas parciales $S_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ donde $m=2n$. Sea $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ vamos a probar que $S_{2n}=h_{2n}-h_n \quad \forall n$
Por inducción
Para n=1 se tiene

$$S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-1=h_2-h_1$$

Suponemos que

$$S_{2n} = h_{2n} - h_n$$

y vamos a probar la validez para $n+1$, se tiene que

$$h_{2(n+1)} - h_{n+1} = \left(h_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(h_n + \frac{1}{n+1}\right) = (h_{2n} - h_n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} =$$

$$S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_{2n+2}$$

por lo tanto la relación es valida para todo n
ahora bien $h_{2n} = \ln(2n) + \gamma \quad si \quad n \to \infty$ y $h_n = \ln(n) + \gamma \quad si \quad n \to \infty$ por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} h_{2n} - h_n = \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)$$

□