Sumas Superiores e inferiores (Parte 5)

Definición 1. *Sea $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ una partición $P \in P_{[a,b]}$. Definimos la norma de una partición P como la longitud del mayor de los subintervalos*

$$\|P\| = máx\{(x_i - x_{i-1}) \mid i = 1, \cdots, n\}$$

Definición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada en $[a, b]$. Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si y solo si*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f, P)$$

en tal caso

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f, P)$$

Definición 3. *Sumas de Riemann Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada en $[a, b]$ sean $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ y $E = \{x_i^* \mid x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n\}$. Definimos las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ como:*

$$R(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Intuitivamente debe ocurrir

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P^*) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad con \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x - i]$$

Vamos ahora a comparar las definiciones vistas en clase y mostraremos su equivalencia

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to R$ acotada en $[a, b]$, f es integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = I$$

si y solo si
$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que para toda partición $P \in P_{[a,b]}$ con $\|P\| < \delta$ se cumple

$$|R(f, P^*) - I| < \epsilon$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f = I$. Se tiene $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$\|P\| < \delta \ \Rightarrow\ |R(f, P^*) - I| < \epsilon$$

por otro lado tenenmos que

$$\underline{S}(f, P) \le R(f, P^*) \le \overline{S}(f, P)$$

por lo que

$$-\overline{S}(f, P) \le -R(f, P^*) \le -\underline{S}(f, P)$$

también ocurre

$$\underline{S}(f,P) \leq I \leq \overline{S}(f,P)$$

de lo anterior

$$-\left(\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right) \leq I - R(f,P^*) \leq \left(\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right)$$

por lo tanto

$$|R(f,P^*) - I| < \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon \quad \textit{siempre que} \quad \|P\| < \delta$$

($\Leftarrow$) Supongamos que
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tal que para toda partición $P \in P_{[a,b]}$ con $\|P\| < \delta$ se cumple

$$|R(f,P^*) - I| < \epsilon$$

tenemos que

$$|R(f,P^*) - I| < \epsilon \ \Rightarrow\ I - \epsilon < R(f,P^*) < I + \epsilon$$

ahora escogemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(x_i^*) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$$

Por lo que

$$R(f,P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i < \sum_{i=1}^{n}\left(m_i + \frac{\epsilon}{b-a}\right)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)\Delta_i$$

$$= \underline{S}(f,P) + \left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = \underline{S}(f,P) + \left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a) = \underline{S}(f,P) + \epsilon$$

Por lo tanto

$$R(f,P^*) < \underline{S}(f,P) + \epsilon \ \Rightarrow\ R(f,P^*) - \epsilon < \underline{S}(f,P)$$

por lo que

$$(I - \epsilon) - \epsilon < \underline{S}(f,P) \ \Rightarrow\ I - 2\epsilon < \underline{S}(f,P) \ \Rightarrow\ I < \underline{S}(f,P) + 2\epsilon < \underline{\int_a^b} f + 2\epsilon$$

y por tanto

$$I < \underline{\int_a^b} f + 2\epsilon \ \Rightarrow\ I \leq \underline{\int_a^b} f$$

ahora escogemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(x_i^*) > M_i - \frac{\epsilon}{b-a}$$

Por lo que

$$R(f,P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i > \sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\epsilon}{b-a}\right)\Delta_i = \overline{S}(f,P) - \epsilon$$

Por lo tanto

$$\overline{S}(f,P) < R(f,P^*) + \epsilon < I + 2\epsilon$$

por lo que

$$\overline{S}(f,P) < I + 2\epsilon \ \overline{\int_a^b} f < I + 2\epsilon$$

por lo tanto

$$\overline{\int_a^b} f \leq I$$

en consecuencia

$$I \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq I$$

concluimos que f es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = I$$

□

Ejemplo Usando sumas de Riemann encontrar $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}$

Solución Vamos a usar una partición en forma de progresión geométrica $a_0 = 1$, $a_n = a_0 q^n$ es decir $2 = 1 \times q^n = q^n$ consecuentemente $q = 2^{\frac{1}{n}}$ y escogemos $\xi_i = x_{i-1} = q^{i-1}$; tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\triangle_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}}(q^i - q^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(q-1) = n(q-1) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = Ln(2)$$

La ultima igualdad se justifica de la siguiente manera :

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{L'hopital} \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2})Ln(2)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} Ln(2) = Ln(2)$$

Por lo tanto

$$\int_1^2 \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = Ln(2)$$

Ejemplo Usando sumas de Riemann hallar la integral $\int_a^b x^p dx$ siendo P un número natural y $a \geq 0$

Solución Elegimos una partición $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_k, ..., t_n = b\}$ donde $t_k = ar^k$ y $t_k - t_{k-1} = ar^k - ar^{k-1} = ar^{k-1}(r-1)$ por lo que $b = ar^n \Rightarrow r = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$

Tenemos entonces que

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\triangle_{x_i} = \sum_{k=1}^{n}(ar^k)^p(ar^k - ar^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(ar^k)^p ar^{k-1}(r-1) = \sum_{k=1}^{n} a^{p+1}r^{kp}\frac{r^k}{r}(r-1)$$

$$= a^{p+1}\frac{r-1}{r}\sum_{k=1}^{n} r^{k(p+1)} = a^{p+1}\frac{r-1}{r}r^{p+1}\frac{r^{n(p+1)}-1}{r^{p+1}-1}$$

Donde la ultima igualdad la podemos justificar como sigue

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k(p+1)} = \sum_{k=1}^{n}\{r^{p+1}\}^k = r^{p+1} + \{r^{p+1}\}^2 + \{r^{p+1}\}^3 + ... + \{r^{p+1}\}^n =$$

$$r^{p+1}\{1 + r^{p+1} + \{r^{p+1}\}^2 + ... + \{r^{p+1}\}^{n-1}\} = r^{p+1}\frac{\{r^{p+1}\}^n - 1}{r^{p+1}-1}$$

Por lo que obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a^{p+1}r^{kp}\frac{r^k}{r}(r-1) = a^{p+1}\frac{r-1}{r}r^{p+1}\frac{\{r^{p+1}\}^n - 1}{r^{p+1}-1}$$

Sustituyendo $r = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ tenemos que

$$a^{p+1}\frac{r-1}{r}r^{p+1}\frac{r^{n(p+1)}-1}{r^{p+1}-1} = a^{p+1}(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})^{p+1}(r-1)\frac{\{(\frac{b}{a})^{\frac{n}{n}}\}^{p+1}-1}{r^{p+1}-1}$$

Vamos ahora a simplificar el término $\frac{r-1}{r^{p+1}-1}$ que se encuentra en la ultima expresion.

Tenemos que:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^p = \frac{r^{p+1}-1}{r-1} \Rightarrow \frac{r-1}{r^{p+1}-1} = \frac{1}{1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^p}$$

Y tomando $\lim_{n\to\infty}$ tenemos que $r \to 1$ pues $r = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ y por lo tanto

$$\frac{1}{1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^p} \to \frac{1}{p+1}$$

Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} a^{p+1}\frac{r-1}{r}r^{p+1}\frac{\{r^{p+1}\}^n - 1}{r^{p+1}-1} = a^{p+1}\frac{\{\frac{b}{a}\}^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$