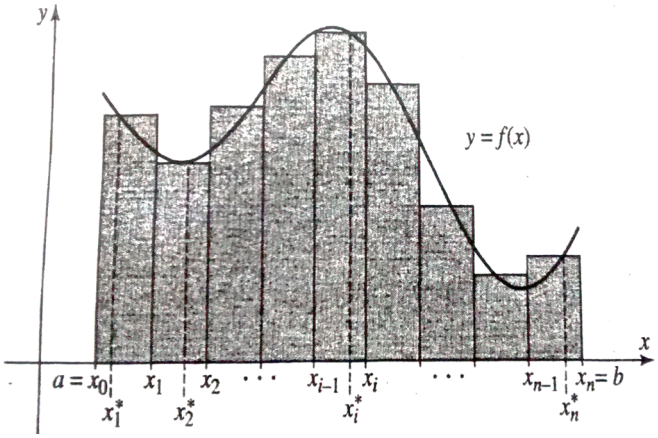
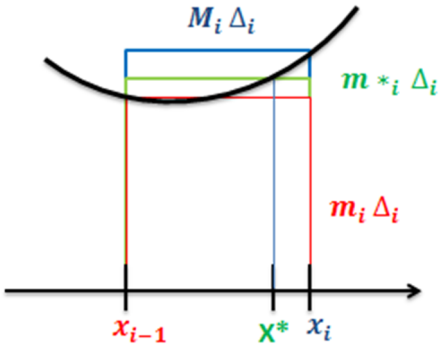
Sumas Superiores e inferiores (Parte 4)

Definición 1. ***Sumas de Riemann*** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f acotada en $[a, b]$ sean $P^* = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ y $E = \{x_1^* \mid x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n\}$. Definimos las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ como:*

$$R(f, P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$



Tenemos que para cada $[x_{i-1}, x_i]$ se tiene



$$m_i \leq m_i^* \leq M_i \;\Rightarrow\; m_i\Delta_i \leq m_i^*\Delta_i \leq M_i\Delta_i \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i^*\Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i$$

$$\Rightarrow\; \underline{S}(f, P^*) \leq R(f, P^*) \leq \overline{S}(f, P^*)$$

Conjetura: Si f es integrable entonces

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, P^*) \leq \lim_{n\to\infty} R(f, P^*) \leq \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P^*) \;\Rightarrow\; \underline{\int_a^b} f \leq \lim_{n\to\infty} R(f, P^*) \leq \overline{\int_a^b} f \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} R(f, P^*) = \int_a^b f$$

Ejemplo Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada asi: $f(x)=e^x\ \forall\ x\ \in\ [a,b]$. Usando sumas de Riemann calcular

$$\int_a^b e^x\ dx$$

Solución En este caso f es una función acotada y si

$$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},a+3\frac{b-a}{n},\cdots,a+n\frac{b-a}{n}=b\right\}$$

es una partición sobre $[a,b]$ entonces escogemos $x_i^*=x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ por lo tanto

$$R(f,P^*)=\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta_i=\sum_{i=1}^n e^{x_i}\left(\frac{b-a}{n}\right)=\sum_{i=1}^n e^{a+i\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

por lo tanto

$$R(f,P^*)=\sum_{i=1}^n e^{a+(i)\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right)=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^n e^{(i)\frac{b-a}{n}}$$

$$=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^n\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{(i)}\underbrace{=}_{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}-1$$

$$=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}-\left(1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)\right)}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{e^{\frac{b-a}{n}}-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$$=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\right)$$

$$=e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\right)$$

Sacamos limite

$$\lim_{n\to\infty}e^a\left(\frac{b-a}{n}\right)e^{\frac{b-a}{n}}\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}=e^a\left(1-e^{b-a}\right)\lim_{n\to\infty}e^{\frac{b-a}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}\underbrace{=}_{L'hopital}e^a\left(1-e^{b-a}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{b-a}{n^2}}{-e^{\frac{b-a}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=-e^a(1-e^{b-a})=e^b-e^a$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}R(f,P^*)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n e^{a+(i)\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right)=e^b-e^a$$

por lo tanto f es integrable sobre $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f=e^b-e^a$

Ejemplo Calcular usando sumas de Riemann

$$\int_1^4 \left(x^2 - 4x + 5\right) dx$$

Solución en este caso $a = 1$, $b = 4$

$$P = \left\{1, 1 + \frac{3}{n}, 1 + 2\frac{3}{n}, 1 + 3\frac{3}{n}, \cdots, 1 + i\frac{3}{n}, ..., 1 + n\frac{3}{n} = 4\right\}$$

es una partición y

$$\triangle_{x_i} = \frac{4-1}{n},\ x_i^* = x_i = 1 + \frac{3i}{n}$$

tenemos entonces que:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + i\frac{3}{n}\right)^2 - 4\left(1 + i\frac{3}{n}\right) + 5\right]\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2} - 4 - \frac{12i}{n} + 5\right) = \left(\frac{3}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(2 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 2 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$$= \left(\frac{3}{n}\right)\left(2n + \left(\frac{6}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{9}{n^2}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= 6 - 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 6$$