Propiedades de la Integral

Lema 1. *Suponga que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es integrable sobre* $[a, b]$ *entonces*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Demostración. Dada una partición $P \in P_{[a,b]}$, tenemos que al ser f integrable se tiene

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(-1)(x_{i-1} - x_i) = (-1) \lim_{\|P\|\to 0} f(x_i')(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f$$

□

Corolario 1. *Si* f *es integrable en* $[a, b]$, *entonces* f *es integrable en algún* $[c, d] \subset [a, b]$

Demostración. Supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$, entonces $\forall\ \epsilon > 0$ existe $P \in P_{[a,b]}$ tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$$

Si tomamos $P' = P \bigcup \{c, d\}$, se tiene entonces

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \epsilon$$

y podemos ver $P' = P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3$ tal que $P_1 \in P_{[a,c]}$, $P_2 \in P_{[c,d]}$ y $P_3 \in P_{[d,b]}$ por lo tanto

$$\overline{S}(f, P') = \overline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) + \overline{S}(f, P_3)$$

$$\underline{S}(f, P') = \underline{S}(f, P_1) + \underline{S}(f, P_2) + \underline{S}(f, P_3)$$

De manera que

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \epsilon \ \Rightarrow\ \overline{S}(f, P_1) - \underline{S}(f, P_1) + \overline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2) + \overline{S}(f, P_3) - \underline{S}(f, P_3) < \epsilon$$

Debe ocurrir entonces

$$\overline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_2) < \epsilon$$

por lo tanto f es integrable sobre $[c, d]$ □

Teorema 1. *Si* f *es integrable en* $[a, b]$ *y* $\forall\ x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Demostración. En este caso

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \geq 0$$

□

Teorema 2. *Si f es integrable en $[a,b]$ y $\forall\ x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Demostración. Sea $P \in P_{[a,b]}$ dada por $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ se tiene entonces

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

por lo que

$$\underline{\int_a^b} f \geq \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i \geq \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i = m(b-a)$$

analogamente

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i = M(b-a)$$

por lo tanto

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$$

como f es integrable

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

por lo tanto

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

□

Teorema 3. *Si f es integrable en $[a,b]$ $\forall\ x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$, entonces*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$$

Demostración. Se tiene que

$$|f(x)| \leq M \ \Rightarrow \ -M \leq f(x) \leq M$$

y según el resultado anterior

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

es decir

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$$

□

Teorema 4. *Si f, g son funciones integrables en* $[a, b]$ *y* $\forall\ x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, *entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Demostración. Tenemos que

$$\forall\ x \in [a, b], \quad g(x) - f(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b (f - g) \geq 0$$

por lo tanto

$$\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$$

□

Teorema 5. *Si f es integrable en* $[a, b]$, *entonces* $|f|$ *es integrable en* $[a, b]$ *y se cumple*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b - a)$$

donde M *es una cota superior para* $|f|$ *en* $[a, b]$

Demostración. Supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$ entonces f es acotada y $\exists\ M > 0$ tal que

$$\forall\ x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq M$$

□

Teorema 6. *Si f es integrable en* $[a, b]$ *entonces* $|f|$ *es integrable en* $[a, b]$ *y se cumple*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b - a)$$

donde M *es una cota superior para* $|f|$ *en* $[a, b]$

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a, b]$. Entonces f es acotada y existe $M > 0$ tal que $\forall\ x \in [a, b]$ se tiene $|f(x)| \leq M$.
Sea $g(x) = |x|$. Com g es continua por el resultado anterior se tiene que $|f|$ es integrable en $[a, b]$ de ahi que $-|f|$ es integrable y

$$\int_a^b -|f| = -\int_a^b |f|$$

ahora bien $\forall\ x \in [a, b]$ se tiene

$$-M \leq -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \leq M$$

y según los resultados anteriores

$$-M(b - a) = \int_a^b -M \leq -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b - a)$$

es decir

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a)$$

$\square$