Supremos e Infimos

Definición 1. *Si* $A \subset \mathbb{R}$, *y* $x \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\begin{aligned} x + A &= \{x + a \mid a \in \ A\} \\ xA &= \{xa \mid a \in \ A\} \\ -A &= \{-a \mid a \in \ A\} \end{aligned}$$

Teorema 1. *Supongamos que* $A \subset B \subset \mathbb{R}$, *donde* B *es acotado. Entonces*

$$\begin{array}{ll} (a) & \sup\ A \leq \sup\ B \\ (b) & \inf\ A \geq \inf\ B \end{array}$$

Demostración. Por hipótesis, $\forall\ a \in A,\ a \in B$ por lo que $a \leq \sup B$. De manera que $\sup B$ es una cota superior de A $\therefore\ \sup A \leq \sup B$
Similarmente $\forall\ a \in A,\ a \in B$ por lo que $a \geq \inf B$. De manera que $\inf B$ es una cota inferior de A $\therefore\ \inf A \geq \inf B$

□

Teorema 2. *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *es acotado y* $x \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\begin{array}{llll} (a) & \sup(x + A) = x + \sup A, & e & \inf(x + A) = x + \inf A \\ (b) & Si\ x > 0,\ entonces\ \sup(xA) = x \sup A, & e & \inf(xA) = x \inf A \\ (c) & \sup(-A) = -\inf A & e & \inf(-A) = -\sup A \\ (d) & Si\ x < 0,\ entonces\ \sup(xA) = x \inf A, & e & \inf(xA) = x \sup A \end{array}$$

Demostración. Suponga que $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $u = \sup A \in \mathbb{R}$.
(a) Sea $y \in x + A$ entonces $y = x + a$ *p.a.* $a \in A$. Pero $x + a \leq x + u$ por lo que $y \leq x + u$. Por tanto $x + u$ es una cota superior para $x + A$.
Supongamos ahora que v es otra cota superior de $x + A$. Entonces $\forall\ a \in A,\ x + a \leq v$. Por lo que $\forall\ a \in A$, $a \leq v - x$. De manera que $v - x$ es una cota superior de A y por lo tanto $u \leq v - x$ por lo que $x + u \leq v$.
De la definición se tiene
$x + u = \sup(x + A)$. Por lo que $x + \sup A = \sup(x + A)$
Suponga que $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $u = \inf A \in \mathbb{R}$.
(a') Sea $y \in x + A$ entonces $y = x + a$ *p.a.* $a \in A$. Pero $x + a \geq x + u$ por lo que $y \geq x + u$. Por tanto $x + u$ es una cota inferior para $x + A$.
Supongamos ahora que v es otra cota inferior de $x + A$. Entonces $\forall\ a \in A,\ x + a \geq v$. Por lo que $\forall\ a \in A$, $a \geq v - x$. De manera que $v - x$ es una cota inferior de A y por lo tanto $u \geq v - x$ por lo que $x + u \geq v$.
De la definición se tiene
$x + u = \inf(x + A)$. Por lo que $x + \inf A = \inf(x + A)$ Suponga que $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ y $u = \sup A \in \mathbb{R}$.
(b) Sea $y \in xA$ entonces $y = xa$ *p.a.* $a \in A$. Pero $xa \leq xu$ por lo que $y \leq xu$. Por tanto xu es una cota superior para xA.
Supongamos ahora que v es otra cota superior de xA. Entonces $\forall\ a \in A,\ xa \leq v$. Por lo que $\forall\ a \in A$, $a \leq \frac{v}{x}$. De manera que $\frac{v}{x}$ es una cota superior de A y por lo tanto $u \leq \frac{v}{x}$ por lo que $xu \leq v$.
De la definición se tiene
$xu = \sup(xA)$. Por lo que $x \sup A = \sup(xA)$
Suponga que $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ y $u = \inf A \in \mathbb{R}$.

(b') Sea $y \in xA$ entonces $y = xa$ $p.a.$ $a \in A$. Pero $xa \geq xu$ por lo que $y \geq xu$. Por tanto xu es una cota inferior para xA.
Supongamos ahora que v es otra cota inferior de xA. Entonces $\forall\ a \in A,\ xa \geq v$. Por lo que $\forall\ a \in A$, $a \geq \frac{v}{x}$. De manera que $\frac{v}{x}$ es una cota inferior de A y por lo tanto $u \geq \frac{v}{x}$ por lo que $xu \geq v$.
De la definición se tiene
$xu = \text{ínf}(xA)$. Por lo que $x\,\text{ínf}\,A = \text{ínf}(xA)$
Suponga que $A \subset \mathbb{R}$ y $u = \text{ínf}\,A \in \mathbb{R}$.
(c) Se tiene entonces que $\forall\ a \in A,\quad u \leq a$ por lo tanto $\forall\ a \in A,\ \ -a \leq -u$ y $-u$ es una cota superior de -A.
Sea v otra cota superior de -A, esto quiere decir que $\forall\ -a \in -A,\ -a \leq v$ por lo que $\forall\ -a \in -A,\ -v \leq a$ y en ese caso $-v$ es una cota inferior de A y debe ocurrir $-v \leq u$ por lo que $-u \leq v$ y concluimos que $-u = \sup(-A)$ es decir $-\text{ínf}\,A = \sup(-A)$ Suponga que $A \subset \mathbb{R}$ y $u = \sup A \in \mathbb{R}$.
(c') Se tiene entonces que $\forall\ a \in A,\quad u \geq a$ por lo tanto $\forall\ a \in A,\ \ -a \geq -u$ y $-u$ es una cota inferior de -A.
Sea v otra cota inferior de -A, esto quiere decir que $\forall\ -a \in -A,\ -a \geq v$ por lo que $\forall\ -a \in -A,\ -v \geq a$ y en ese caso $-v$ es una cota superior de A y debe ocurrir $-v \geq u$ por lo que $-u \geq v$ y concluimos que $-u = \text{ínf}(-A)$ es decir $-\sup A = \text{ínf}(-A)$
(d) Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y usando el inciso b se tiene

$$\text{ínf}(-xA) = -x\,\text{ínf}\,A$$

Por otro lado según el inciso c

$$\text{ínf}(-xA) = -\sup(xA)$$

por lo tanto

$$-x\,\text{ínf}\,A = -\sup(xA) \ \Rightarrow\ x\,\text{ínf}\,A = \sup(xA)$$

(d') Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y usando el inciso b se tiene

$$\sup(-xA) = -x\sup A$$

Por otro lado según el inciso c

$$\sup(-xA) = -\text{ínf}(xA)$$

por lo tanto

$$-x\sup A = -\text{ínf}(xA) \ \Rightarrow\ x\sup A = \text{ínf}(xA)$$

□

Teorema 3. *Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ definimos $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$*

(a) *Si A y B son acotados inferiormente entonces* $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$
(b) *Si A y B son acotados superiormente entonces* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Demostración. $\forall\ a \in A,\ b \in B$ se tiene $a + b \in A + B$ y $a \geq \text{ínf}\,A$ y $b \geq \text{ínf}\,B$ por lo que

$$a + b \geq \text{ínf}\,A + \text{ínf}\,B$$

Tenemos entonces que $\text{ínf}\,A + \text{ínf}\,B$ es una cota inferior de $A + B$. Supongamos ahora que w es otra cota inferior de $A+B$. Entonces $\forall\ a \in A,\ b \in B$ se tiene $a+b \geq w$ es decir $a \geq w - b$ por lo que $\forall\ b \in B,\ w - b$ es una cota inferior de A. Entonces

$$\forall\ b \in B,\ w - b \leq \text{ínf}\,A,\quad es\ \ decir\ \ w - \text{ínf}\,A \leq b$$

por lo que $w - \text{ínf}\, A$ es una cota inferior de B y se tiene

$$w - \text{ínf}\, A \leq \text{ínf}\, B$$

por lo tanto

$$w \leq \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$$

y por lo tanto

$$\text{ínf}(A+B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$$

(b) $\forall\ a \in A,\ b \in B$ se tiene $a + b \in A + B$ y $a \leq \sup A$ y $b \leq \sup B$ por lo que

$$a + b \leq \sup A + \sup B$$

Tenemos entonces que $\sup A + \sup B$ es una cota superior de $A + B$. Supongamos ahora que w es otra cota superior de $A + B$. Entonces $\forall\ a \in A,\ b \in B$ se tiene $a + b \leq w$ es decir $a \leq w - b$ por lo que $\forall\ b \in B,\ w - b$ es una cota superior de A. Entonces

$$\forall\ b \in B,\ w - b \geq \sup A, \quad es \ \ decir \ \ w - \sup A \geq b$$

por lo que $w - \sup A$ es una cota superior de B y se tiene

$$w - \sup A \geq \sup B$$

por lo tanto

$$w \geq \sup A + \sup B$$

y por lo tanto

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

□

Teorema 4. *Si* $A, B \subset \mathbb{R}$ *y* $A, B \neq \emptyset$ *son tal que* $\forall\ a \in A,\ \forall\ b \in B,\ a \leq b$, *entonces* $\sup A \leq \text{ínf}\, B$ *y las siguientes proposiciones son equivalentes*

$$(a)\ \sup A = \text{ínf}\, B$$
$$(b)\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B\ \ni\ b - a < \epsilon$$
$$(c)\ \exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B\ \ni\ b - a < k\epsilon$$
$$(d)\ \exists\ un\ unico\ real\ u\ \ni\ \forall\ a \in A,\ b \in B,\ a \leq u \leq b\ (en\ ese\ caso,\ u = \sup A = \text{ínf}\, B)$$

Demostración. Supongamos que $A, B \subset \mathbb{R}$ son tal que $\forall\ a \in A,\ \forall\ b \in B,\ a \leq b$. Entonces $\forall\ a \in A$, a es cota inferior de B, por lo que $a \leq \text{ínf}\, B$. Esto es, $\forall\ a \in A,\ a \leq \text{ínf}\, B$ por lo que $\text{ínf}\, B$ es una cota superior de A y consecuentemente $\sup A \leq \text{ínf}\, B$
$(a \Rightarrow b)$ Supongamos que $u = \sup A = \text{ínf}\, B$. Sea $\epsilon > 0$. Por propiedades de supremo

$$\exists\ a \in A\ \ni\ a > u - \frac{\epsilon}{2} \ \Rightarrow\ -u + \frac{\epsilon}{2} < -a$$

$$\exists\ b \in B\ \ni\ b < u + \frac{\epsilon}{2}$$

de lo anterior se tiene

$$b + (-a) < \left(u + \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(-u + \frac{\epsilon}{2}\right) \ \Rightarrow\ b - a < \epsilon$$

($b \Rightarrow c$) Supongamos que $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B\ \ni\ b - a < \epsilon$ si consideramos $k = 1$ se sigue

$$\exists\ 1 = k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B\ \ni\ b - a < k\epsilon$$

($c \Rightarrow d$) Supongamos que $\exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ a \in A,\ b \in B\ \ni\ b - a < k\epsilon$ y sea $u = \sup A$ como se probo al pricipio $u \leq \inf B$. Por lo tanto $\forall\ a \in A,\ b \in B,\ a \leq u \leq b$.
Ahora supongamos que

$$\exists\ v \neq u\ \ni\ \forall\ a \in A,\ b \in B,\ a \leq v \leq b$$

Sea $\epsilon = \dfrac{|u - v|}{K}$ se tiene que $\epsilon > 0$ y por el inciso (c) , $\exists a \in A,\ b \in B$ tal que $b - a < k\epsilon$ por lo que $b - a < |u - v|$ pero $u, v \in [a, b]$ por lo que $|u - v| < b - a$ por lo tanto hay una contradicción y en ese caso $u = v$
($d \Rightarrow a$) Supongamos que (d) es cierto tenemos que probar que $\sup A = \inf B$. Supongamos que $\sup A \neq \inf B$. Entonces $\sup A < \inf B$ pero al principio mostramos que $\sup A \leq \inf B$. Por tanto

$$\forall\ a \in A,\ b \in B,\quad a \leq \sup A < \inf B \leq b$$

esto contradice (d) por lo tanto $\sup A = \inf B$ □

Teorema 5. *Suponga que* $x, a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} (a)\ \textit{Si}\ \exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ x \leq a + k\epsilon,\ \textit{entonces}\ x \leq a \\ (b)\ \textit{Si}\ \exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ x \geq a - k\epsilon,\ \textit{entonces}\ x \geq a \\ (c)\ \textit{Si}\ \exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ |x - a| \leq k\epsilon,\ \textit{entonces}\ x = a \end{array}$$

Demostración. (a) Supongamos que $\exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ x \leq a + k\epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $\dfrac{\epsilon}{k} > 0$, por tanto

$$x \leq a + k\left(\frac{\epsilon}{k}\right) = a + \epsilon$$

como ϵ es tan pequeña como se quiera, se sigue $x \leq a$.
(b) Supongamos que $\exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ x \geq a - k\epsilon$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $\dfrac{\epsilon}{k} > 0$ por lo que

$$x \geq a - k\left(\frac{\epsilon}{k}\right) = a - \epsilon\ \Rightarrow\ x \geq a - \epsilon\ \Rightarrow\ -x \leq -a + \epsilon$$

como ϵ es tan pequeña como se quiera, se sigue $-x \leq -a$ por lo tanto $x \geq a$
(c) Supongamos que $\exists\ k > 0\ \ni\ \forall\ \epsilon > 0,\ |x - a| \leq k\epsilon$ entonces

$$-k\epsilon \leq x - a \leq k\epsilon$$

de la primera parte de la desigualdad

$$-k\epsilon \leq x - a\ \Rightarrow\ x \geq a - K\epsilon\ \underbrace{\Rightarrow}_{(b)}\ x \geq a$$

de la segunda parte de la desigualdad

$$x - a \leq k\epsilon\ \Rightarrow\ x \leq a + k\epsilon\ \underbrace{\Rightarrow}_{(a)}\ x \leq a$$

de lo anterior se sigue $x = a$ □