Ejemplo Vamos a probar la desigualdad

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$$

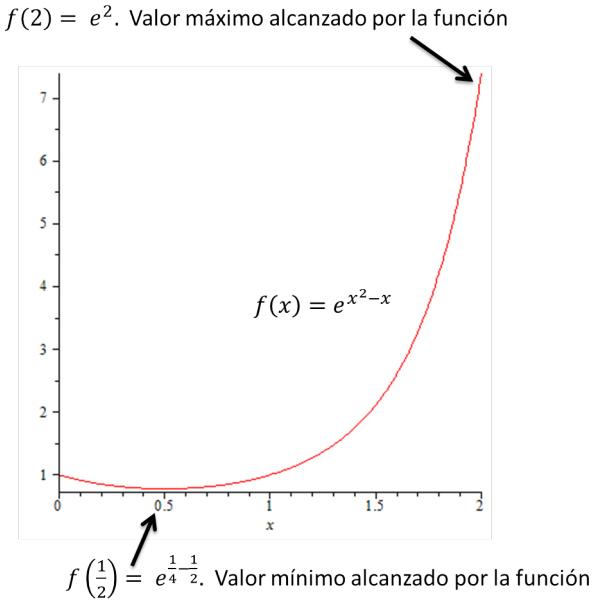
Solución Tenemos que

$$f(x) = e^{x^2-x} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2-x}(2x-1)$$

ahora bien

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

como f' va de - a + en $x = \frac{1}{2}$, entonces $x = \frac{1}{2}$ es punto mínimo, por lo que $m = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$ y $M = e^2$



Por lo tanto

$$e^{-\frac{1}{4}} \leq e^{x^2-x} \leq e^2 \Rightarrow \int_0^2 e^{\frac{1}{4}}dx \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq \int_0^2 e^2 dx \Rightarrow 2e^{-\frac{1}{4}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} \leq 2e^2$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO

Teorema 1. *Si f, g:[a,b] $\to \mathbb{R}$, son funciones continuas en [a,b] y g(x)> 0 para todo x ϵ [a,b], entonces existe ξ ϵ [a,b], talque:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Demostración. Como f ϵ $C_{[a,b]}$, entonces existe m = $min_{[a,b]}f(x)$ y M = $max_{[a,b]}f(x)$ y se tiene m $\leq$ f(x)$\leq$ M para todo x ϵ [a,b].

En consecuencia, mg(x) $\leq$ f(x)g(x) $\leq$ Mg(x), por lo que

$$m\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

de donde,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

por el Teorema del Valor Intermedio, existe ξ ϵ [a,b], talque

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi)$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Utilizar lo anterior para mostrar que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \frac{1}{7}$$

elegimos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ y $g(x) = x^6$

Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^6dx = \frac{1}{7\sqrt{1+\xi^2}}$$

como $0 \leq \xi \leq 1$ entonces

$$\frac{1}{7\sqrt{1+1^2}} \leq \frac{1}{7\sqrt{1+\xi^2}} \leq \frac{1}{7\sqrt{1+0^2}}$$

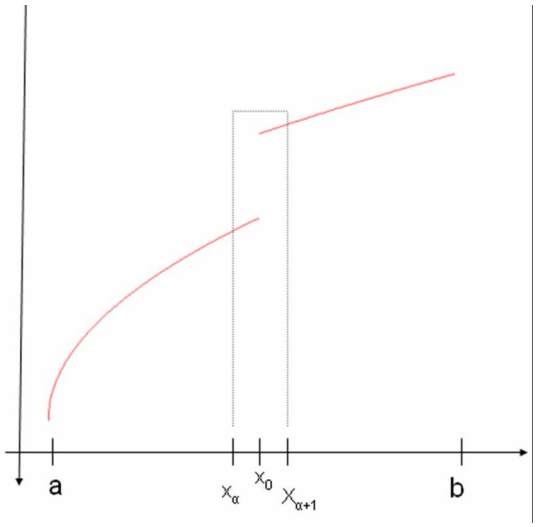
Por lo tanto

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \frac{1}{7}$$

□

Teorema 2. *Sea $f:[a,b]\to R$ f acotada en [a,b]. Si f es continua en [a,b], excepto en un punto entonces f es integrable en [a,b].*

Demostración. Suppongamos que $x_0 \in [a,b]$ tal que f es discontinua en x_0



Sean x_α, $x_{\alpha+1}\in [a,b]$ tal que $x_0 \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$ y $x_{\alpha+1}-x_\alpha < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$. Como f es continua en $[a,x_\alpha]$ y $[x_{\alpha+1},b]$ f es uniformemente continua por lo tanto f es integrable en $[a,x_\alpha]$ y $[x_{\alpha+1},b]$

Construimos P=$\{x_0,x_1,...,x_\alpha,x_{\alpha+1},...,x_n\}$ y tenemos entonces que

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+(M_\alpha-m_\alpha)(x_\alpha-x_{\alpha+1})+\sum_{i=\alpha+1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i+1})$$

Para el primer sumando tenemos que f es continua por lo tanto integrable por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\frac{\epsilon}{4(b-a)}\sum_{i=1}^{\alpha}(x_i-x_{i-1})=\frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{4}$$

Para el segundo sumando

$$(M_\alpha-m_\alpha)(x_\alpha-x_{\alpha+1})\le(M-m)(x_\alpha-x_{\alpha+1})<(M-m)\frac{\epsilon}{2(M-m)}=\frac{\epsilon}{2}$$

Para el tercer sumando, usamos el hecho de que f es continua e integrable en $[x_{\alpha+1},b]$

$$\sum_{i=\alpha+1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i+1})<\sum_{i=\alpha+1}^{n}\frac{\epsilon}{4(b-a)}(x_i-x_{i+1})=\frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{4}$$

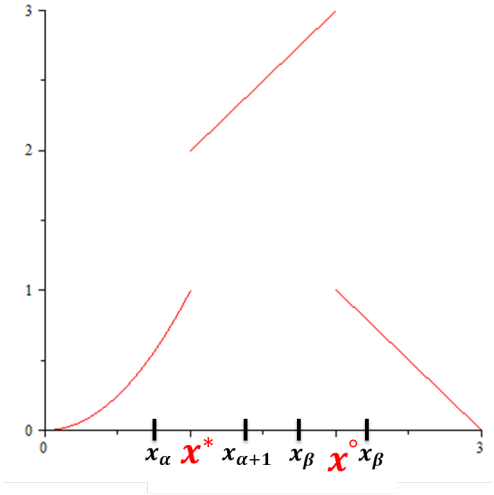
Por lo tanto

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

Por lo tanto f es integrable en todo [a,b] □

Teorema 3. *Sea $f : [a,b] \to R$ f acotada en [a,b]. Si f es continua en [a,b], excepto en x°, x^* entonces f es integrable en [a,b].*

Demostración. Suppongamos que $x^\circ, x^* \in [a,b]$ tal que f es discontinua en x°, x^*



Sean x_α, $x_{\alpha+1} \in [a,b]$ tal que $x^* \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$ y

$$x_{\alpha+1} - x_\alpha < \frac{\epsilon}{8(M-m)}$$

Sean x_β, $x_{\beta+1} \in [a,b]$ tal que $x^\circ \in (x_\beta, x_{\beta+1})$ y

$$x_{\beta+1} - x_\beta < \frac{\epsilon}{8(M-m)}$$

Como f escontinua en $[a, x_\alpha]$, $[x_{\alpha+1}, x_\beta]$ y $[x_{\beta+1}, b]$ f es uniformemente continua por lo tanto f es integrable en $[a, x_\alpha]$, $[x_\alpha + 1, x_\beta]$, $[x_\beta + 1, b]$
Construimos P=$\{a = x_0, x_1, ..., x_\alpha, x_{\alpha+1}, x_\beta, x_{\beta+1} ..., x_n = b\}$ y tenemos entonces que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (M_\alpha - m_\alpha)(x_{\alpha+1} - x_\alpha) + (M_\beta - m_\beta)(x_{\beta+1} - x_\beta) + \sum_{i=\beta+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i+1})$$

Para el primer sumando tenemos que f es continua por lo tanto integrable por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\alpha}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{6(b-a)}\sum_{i=1}^{\alpha}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{6(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{6}$$

Para el segundo sumando

$$(M_\alpha - m_\alpha)(x_{\alpha+1} - x_\alpha) \leq (M-m)(x_\alpha - x_{\alpha+1}) < (M-m)\frac{\epsilon}{8(M-m)} = \frac{\epsilon}{8}$$

Para el tercer sumando, usamos el hecho de que f es continua e integrable en $[x_{\alpha+1}, x_\beta]$

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(M_i - m_i)(x_i - x_{i+1}) < \sum_{i=\alpha+1}^{\beta}\frac{\epsilon}{6(b-a)}(x_i - x_{i+1}) = \frac{\epsilon}{6(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{6}$$

Para el cuarto sumando

$$(M_\beta - m_\beta)(x_{\beta+1} - x_\beta) \leq (M-m)(x_{\beta+1} - x_\beta) < (M-m)\frac{\epsilon}{8(M-m)} = \frac{\epsilon}{8}$$

Para el quinto sumando, usamos el hecho de que f es continua e integrable en $[x_{\beta+1}, b]$

$$\sum_{i=\beta+1}^{b}(M_i - m_i)(x_i - x_{i+1}) < \sum_{i=\beta+1}^{b}\frac{\epsilon}{6(b-a)}(x_i - x_{i+1}) = \frac{\epsilon}{6(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{6}$$

Por lo tanto

$$\overline{S}(f,p) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{6} < \epsilon$$

Por lo tanto f es integrable en todo [a,b] □

Teorema.- Sea $f : [a,b] \to R$, f acotada en [a,b], si f es continua en [a,b] excepto en un conjunto finito de puntos, entonces f es integrable.

¿Que pasa con una función con una cantidad infinita de discontinuidades?