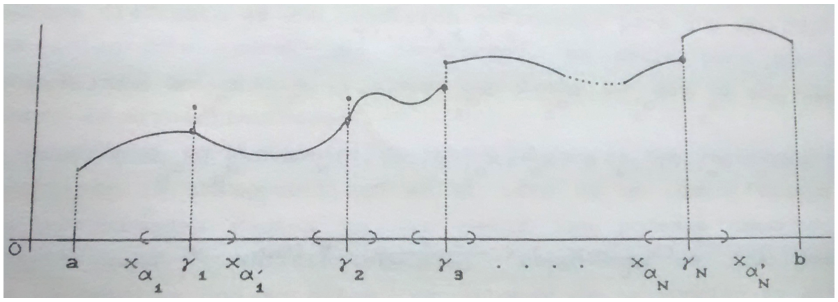
Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to R$, f acotada en [a,b], si f es continua en [a,b] excepto en un conjunto finito de puntos, entonces f es integrable.*

Demostración. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_N$ los puntos en que f es discontinua

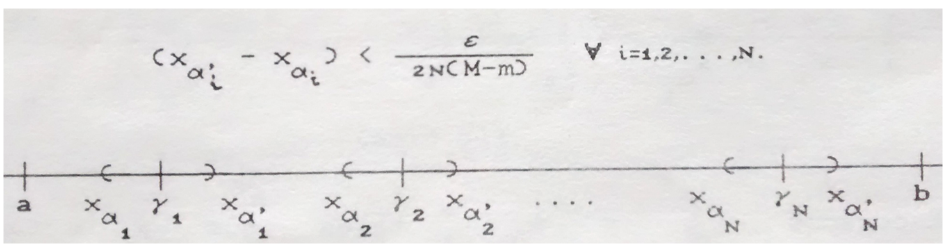


escogemos

$$x_{\alpha_i} \quad y \quad x_{\alpha'_i}, \quad tal \quad que \quad \gamma_i \in (x_{\alpha_i}, x_{\alpha'_i})$$

tal que $\forall\ i = 1, 2, ..., N$ se cumple

$$(x_{\alpha'_i} - x_{\alpha_i}) < \frac{\epsilon}{2N(M-m)}$$



Se tiene que f es continua en

$$[a, x_{\alpha_1}],\ [x_{\alpha'_1}, x_{\alpha_2}], ..., [x_{\alpha'_i}, x_{\alpha_{i+1}}], ..., [x_{\alpha'_N}, b]$$

y por lo tanto uniformemente continua en ellos.
Entonces existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,...,$\delta_{N+1} > 0$ tales que

$$\forall\ x,\ x' \in [a, x_{\alpha_1}], \quad |x' - x| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\forall\ x,\ x' \in [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}], \quad |x' - x| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

$$\vdots$$

$$\forall\ x,\ x' \in [x_{\alpha'_N}, b], \quad |x' - x| < \delta_{N+1} \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(N+1)(b-a)}$$

y por tanto sean

$$P_1 \in P_{[a, x_{\alpha_1}]}, \quad tal \quad que \quad \|P_1\| < \delta_1, \quad con \quad P_1 = \{x_0^1, x_1^1, x_2^1, ..., x_r^1\}$$

$$P_2 \in P_{[x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2}]}, \quad tal \quad que \quad \|P_2\| < \delta_2, \quad con \quad P_2 = \{x_0^2, x_1^2, x_2^2, ..., x_r^2\}$$

$$\vdots$$

$$P_{N+1} \in P_{[x_{\alpha_N'}, b]}, \quad tal \quad que \quad \|P_{N+1}\| < \delta_{N+1}, \quad con \quad P_2 = \{x_0^{N+1}, x_1^{N+1}, x_2^{N+1}, ..., x_r^{N+1}\}$$

de modo que

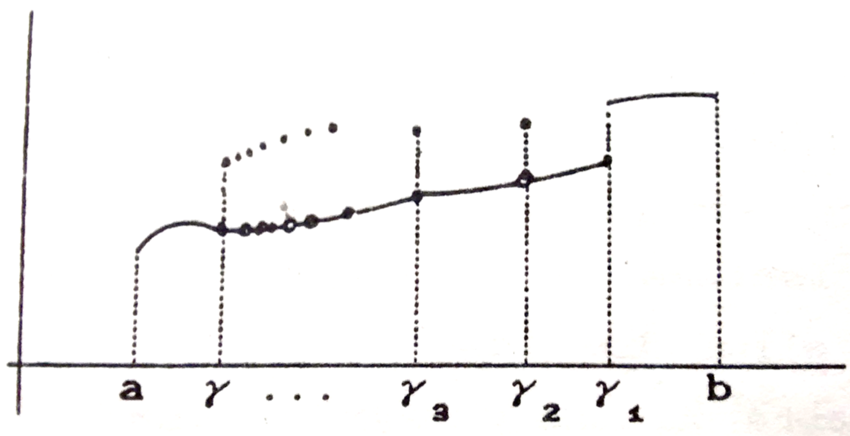
$$\begin{aligned} \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) + (M_{\alpha_1} - m_{\alpha_1})(x_{\alpha_1'} - x_{\alpha_1}) \\ + \overline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_2) + (M_{\alpha_2} - m_{\alpha_2})(x_{\alpha_2'} - x_{\alpha_2}) \\ \vdots \\ (M_{\alpha_N} - m_{\alpha_N})(x_{\alpha_N'} - x_{\alpha_N}) + \overline{S}(f,P_{N+1}) - \underline{S}(f,P_{N+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\epsilon}{2(N+1)} + \frac{\epsilon}{2N} + \ldots + \frac{\epsilon}{2(N+1)} + \frac{\epsilon}{2N} = (N+1)\frac{\epsilon}{2(N+1)} + N\frac{\epsilon}{2N} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Por ejemplo una función que es discontinua en una sucesión convergente de puntos del dominio de la función



Sea $\{\gamma_n\} n \in N$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f, que forma una sucesión convergente a γ, en donde $\gamma_i \in [a,b]$ para toda i=1,2,...,n como $\{\gamma_n\} \to \gamma$, entonces:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ni \ \forall K > N \Rightarrow |\gamma_k - \gamma| < \epsilon$$

es decir, que una infinidad de términos estaria encerrada en un intervalo tan pequeño como queramos y fuera de él solo quedaría un número finito de términos de la sucesión; y por tanto todos los puntos en donde la función es discontinua (la sucesión), estarian encerrados en un número finito de subintervalos.

Teorema 2. *Sea $f : [a,b] \to R$ f acotada en [a,b] si f es continua en [a,b], excepto en un conjunto de discontinuidades que puede ser encerrado en un número finito de intervalos con suma de longitudes tan pequeña como queramos, entonces f es integrable en [a,b].*

Medida Cero y Contenido Cero

Definición 1. *Se dice que en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene* ***contenido cero*** *si $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad y \quad tales \quad que \quad \sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < \epsilon$$

Teorema 3. *Sea $f : [a, b] \to R$, f acotada en [a,b] y si f es continua en [a,b], excepto en un conjunto de contenido cero, entonces f es integrable en [a,b].*

Definición 2. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene* ***medida cero*** *si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de intervalos abiertos tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(U_i) < \epsilon$$

Por ejemplo un conjunto formado por un número finito de puntos claramente tiene medida cero
Si A tiene infinitos puntos que pueden ordenarse formando una sucesión $a_1, a_2, ...$ entonces A tiene medida cero, pues para cada $\epsilon > 0$ se puede elegir U_i que sea rectángulo cerrado que contenga a_i con $\ell(U_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$.
Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ell(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... \right) = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + ... \right) =$$

$$\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{\epsilon}{2}(2) = \epsilon$$

1. $\mathbb{Q}$ es de medida cero.

   Demostración: como $\mathbb{Q}$ es numerable podemos formar $\{r_k\}_1^{\infty}$ y dado $\epsilon > 0$, sea

   $$I_k = \left(r_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \right)$$

   Por lo que

   $$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y \quad v(I_k) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

   y para la suma de las longitudes se tiene

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + ... \right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

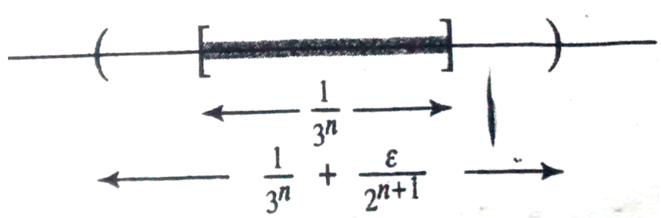
   $\therefore$ $\mathbb{Q}$ tiene medida cero

2. El conjunto de Cantor
   Demostración: Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= [0,1]\\
\mathcal{C}_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\\
\mathcal{C}_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]\\
\mathcal{C}_3 &= \left[0,\frac{1}{27}\right]\cup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right]\\
&\vdots\\
\mathcal{C}_n &= \left[0,\frac{1}{3^n}\right]\cup\cdots\cup\left[1-\frac{1}{3^n},1\right]
\end{aligned}$$

Tenemos que $\mathcal{C}=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_n$ (Conjunto de Cantor)
Cada $\mathcal{C}_n$ es la unión de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$
Vamos a cubrir cada subintervalo de C_n con un intervalo de longitud

$$\frac{1}{3^n}+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$



Tenemos entonces 2^n intervalos abiertos, por lo que la suma de las areas sera

$$2^n\left(\frac{1}{3^n}+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{\epsilon}{2}$$

$$Si\quad \left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0,\quad escogemos\ n\in\mathbb{N}\ \ tal\ \ que\quad \left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{\epsilon}{2}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{\epsilon}{2}<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

entonces $\mathcal{C}\subset C_n$ es de medida cero

Teorema 4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces f es integrable si y solo si sus discontinuidades pueden ser encerradas en un número numerable de intervalos, con suma de longitudes tan pequeña como queramos, es derir, si y solo si su conjunto de discontinuidades tiene medida cero*

Ser de contenido cero es pues una condición suficiente para que una función sea integrable, pero ¿será necesaria? es decir para que una función sea integrable ¿es necesario que su conjunto de discontinuidades tenga contenido cero? o es posible que f sea integrable aun cuando las discontinuidades no puedan ser encerradas en un número finito de intervalos con longitud tan pequeña como queramos.