Definición 1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene* ***medida cero*** *si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de intervalos abiertos tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(U_i) < \epsilon$$

1. $\mathbb{Q}$ es de medida cero.

   Demostración: como $\mathbb{Q}$ es numerable podemos formar $\{r_k\}_1^{\infty}$ y dado $\epsilon > 0$, sea

$$I_k = \left(r_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right)$$

   Por lo que

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y \quad \ell(I_k) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

   y para la suma de las longitudes se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + ...\right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

   $\therefore$ $\mathbb{Q}$ tiene medida cero

Teorema 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces f es integrable si y solo si sus discontinuidades pueden ser encerradas en un número numerable de intervalos, con suma de longitudes tan pequeña como queramos, es decir, si y solo si su conjunto de discontinuidades tiene medida cero*

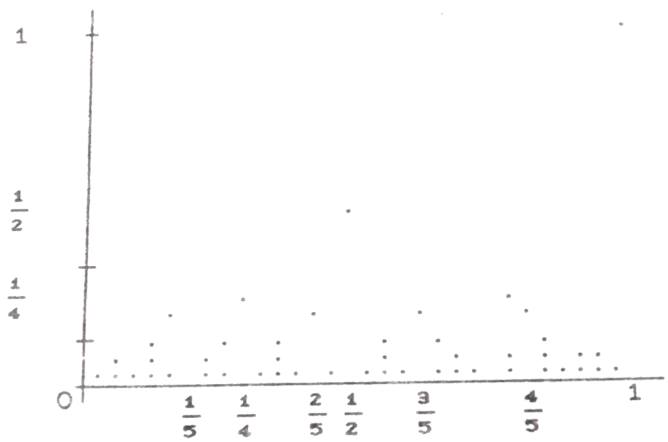
Ser de contenido cero es pues una condición suficiente para que una función sea integrable, pero ¿será necesaria? es decir para que una función sea integrable ¿es necesario que su conjunto de discontinuidades tenga contenido cero? o es posible que f sea integrable aun cuando las discontinuidades no puedan ser encerradas en un número finito de intervalos con longitud tan pequeña como queramos.

Nuestro problema consistiría en utilizar cualquier conjunto que no tenga contenido cero en cualquier intervalo [a,b], para construir una función que sea continua en el [a,b] excepto en dicho conjunto y sea integrable en [a,b].

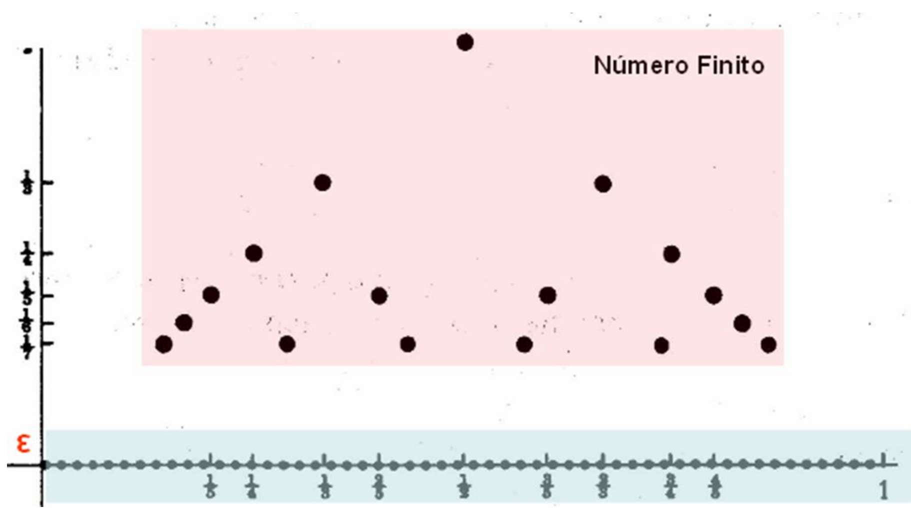
Pues bien Riemann construyo una función con esta característica dicha función es conocida, precisamente como la función de Riemann.

Sea $f:[a,b]\to R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in I\\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q} \text{ con } (p,q)=1\end{cases}$$



Dado $\epsilon>0$ se cumple que todos los valores de la función, excepto un número finito caen dentro de la franja ϵ



Sea $\epsilon>0$ por el principio arquimediano sabemos que $\exists n\in N$ tal que $\frac{1}{n}<\epsilon$ asi pues a lo mas n-1 valores son mayores iguales que ϵ.

Vamos a ver que la función $f : [a, b] \to R$ de Riemann es integrable en $[0, 1]$.
Para esto definimos una partición $P = \{0 = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = 1\}$ y consideramos los siguientes conjuntos

$$I_1 = \left\{[x_{i-1}, x_i] \mid \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \;\; se \;\; tiene \;\; f(x) \leq \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

$$I_2 = \left\{[x_{i-1}, x_i] \mid \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \;\; se \;\; tiene \;\; f(x) \leq 1, \;\; con \quad \sum_i (x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

Por lo tanto

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i \in I_1} (M_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} (M_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2} \cdot \sum_{i \in I_1} (x_i - x_{i-1}) + 1 \cdot \sum_{i \in I_2} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}(1) + (1)\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

Por lo tanto f es integrable en $[0, 1]$ y como

$$\overline{S}(f, P) < \epsilon \;\Rightarrow\; \int_0^1 f = \text{ínf}\{\overline{S}(f, P)\} < \epsilon$$

se tiene entonces que

$$\int_0^1 f = 0$$