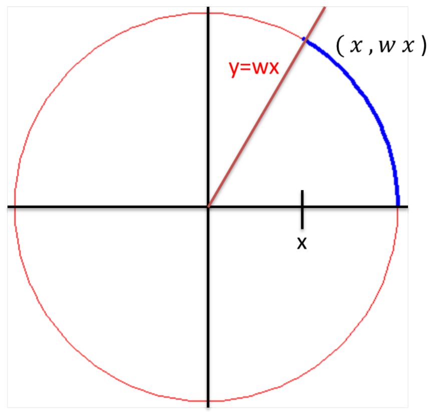
Función Arcotangente (x)

Longitud de un arco de circunferencia

Tenemos que dada la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = wx$



$$x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{1-y^2}$$

$$y = wx \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = w$$

Por lo tanto

$$\frac{y}{x} = w \;\Rightarrow\; \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = w \;\Rightarrow\; y = \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}$$

Por lo que su logitud en un intervalo de $[0, y]$ sera:

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\frac{w}{\sqrt{1+w^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underbrace{=}_{\substack{t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ dt=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}(1+u^2)}}} \int_0^w \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}(1+u^2)}\right) du$$

$$= \int_0^w \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Definición 1. *Definimos la función*

$$\arctan\; w = \int_0^w \frac{du}{1+u^2}, \quad para \quad u \in \mathbb{R}$$

Teorema 1. *(a)* $\arctan\;(-w) = -\arctan(w), \quad \forall\; w \in \mathbb{R}$
(b) La función $\arctan(w)$ *es diferenciable en* $\mathbb{R}$ *y*

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+w^2}, \quad \forall\; w \in \mathbb{R}$$

(c) La función $\arctan(w)$ *es continua*
(d) La función $\arctan(w)$ *es estrictamente creciente*
(e) Existe

$$\lim_{w\to\infty} \arctan(w) \quad y \quad \lim_{w\to-\infty} \arctan(w)$$

Demostración. Tenemos que para (a)

$$\arctan(-w) = \int_0^{-w} \frac{1}{1+u^2}\ dt \underbrace{=}_{\substack{u=-t \\ du=-dt}} -\int_0^{w} \frac{1}{1+(-t)^2}\ (-1)\ dt = -\int_0^{w} \frac{1}{1+u^2}\ du = -\arctan(w)$$

Tenemos que para (b)

$$\frac{d}{dw}\left(\arctan(w)\right) = \frac{d}{dw}\left(\int_0^w \frac{dt}{1+u^2}\right) = \frac{1}{1+w^2}$$

Tenemos que para (c)
Al ser $\arctan(w)$ diferenciable entonces es continua
Tenemos que para (d)

$$(\arctan(w))' = \frac{1}{1+w^2} > 0 \iff w \in \mathbb{R}$$

por lo tanto $\arctan(w)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$
Tenemos que para (e)

$$\lim_{w\to\infty} \arctan(w) = \lim_{w\to\infty} \int_0^w \frac{1}{1+u^2}\ du = \lim_{w\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\ du + \int_1^w \frac{1}{1+u^2}\ du\right)$$

Para la primer integral se tiene

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\ du < \int_0^1 1\ du = 1$$

Para la segunda integral como

$$\frac{1}{1+u^2} < \frac{1}{u^2} \Rightarrow \int_1^w \frac{1}{1+u^2}\ du < \int_1^w \frac{1}{u^2}\ du = -\frac{1}{w} + 1$$

por lo tanto

$$\lim_{w\to\infty} \arctan(w) < \lim_{w\to\infty} 1 + \frac{-1}{w} + 1 = 2$$

y por lo tanto si existe el limite. Analogamente existe

$$\lim_{w\to-\infty} \arctan(w)$$

□

Definición 2. *El número* π *se define*

$$\pi = 2\lim_{w\to\infty} \arctan(w) = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\ du$$

Como $\arctan(w)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente en $(-\infty, +\infty)$, se tiene que existe la inversa.

Definición 3. *Definimos*

$$\tan(x) = (\arctan(x))^{-1}, \quad \textit{donde} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como $\arctan(x)$ es creciente entonces $\tan(x)$ es creciente
Como $\arctan(x)$ es continua entonces $\tan(x)$ es continua en su dominio
Tenemos que

$$\tan'(x) = \left(\arctan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\frac{1}{(1+arctan^{-1})^2(x)}} = 1 + (\arctan^{-1}(x))^2 = 1 + \tan^2(x)$$

Función Seno (x) y Coseno (x)

Definición 4. *Definimos*

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \quad y \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

Ejercicio Calcular $\cos'(x)$

Solución En este caso

$$\cos'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\right)' = \frac{\sqrt{1+\tan^2(x)}(1)' - (1)\left(\frac{\tan(x)(1+\tan^2(x))}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\right)}{1+\tan^2(x)} = -\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\operatorname{sen}(x)$$

Ejercicio Calcular $\operatorname{sen}'(x)$

Solución En este caso

$$\operatorname{sen}'(x) = \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\right)' = \frac{\sqrt{1+\tan^2(x)}(1+\tan^2(x)) - \tan(x)\left(\frac{\tan(x)(1+\tan^2(x))}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\right)}{1+\tan^2(x)}$$

$$= \sqrt{1+\tan^2(x)} - \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \cos(x)$$

Ejercicio Demostrar que

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin(x)$$

Solución En este caso

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \underbrace{=}_{t=\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}(1-u^2)}(1-u^2)\,du = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(x)$$