

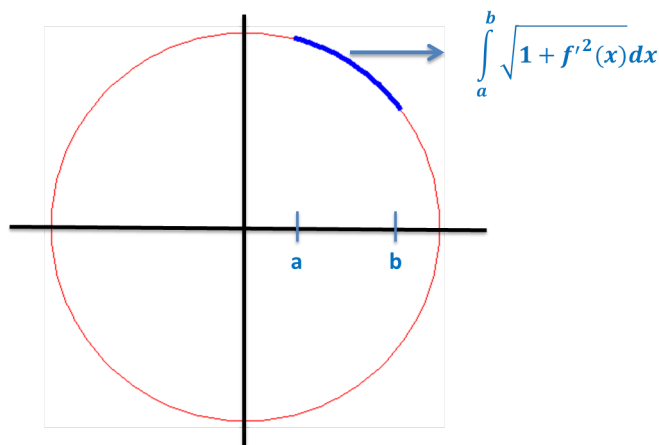
Función Arcoseno (x)

Longitud de un arco de circunferencia

Tenemos que dada la circunferencia unitaria

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Por lo que su logitud en un intervalo de $[a, b]$ sera:



$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Definición 1. Definimos la función

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad \text{para } -1 < x < 1$$

Teorema 1. (a) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$

(b) La función $\arcsin(x)$ es diferenciable en $(-1, 1)$ y

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

(c) La función $\arcsin(x)$ es continua

(d) La función $\arcsin(x)$ es estrictamente creciente

(e) La función $\arcsin(x)$ es acotada

Demostración. Tenemos que para (a)

$$\arcsin(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \stackrel{\substack{u = -t \\ du = -dt}}{=} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - (-t)^2}} (-1) dt = - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = -\arcsin(x)$$



Tenemos que para (b)

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tenemos que para (c)

Al ser $\arcsin(x)$ diferenciable entonces es continua

Tenemos que para (d)

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

por lo tanto $\arcsin(x)$ es estrictamente creciente en $[-1, 1]$ Tenemos que para (e) Como

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$

por lo tanto $\arcsin(x) < 2$

□

Definición 2. El número π se define

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Según lo anterior

$$\arcsin(-1) = -\arcsin(1) = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Al ser $\arcsin(x)$ continua se tiene que $\arcsin(-1, 1)$ es un intervalo.

Como $\arcsin(x)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente en $(-1, 1)$, se tiene que

$$\arcsin[-1, 1] = [c, d]$$

donde

$$c = \inf\{\arcsin(x) \mid -1 < x < 1\} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$d = \sup\{\arcsin(x) \mid -1 < x < 1\} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Función Seno (x)

Definición 3. Dado que $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y es estrictamente creciente, entonces existe su inversa, a la cual llamamos $\sin(x)$ donde $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

Se tiene entonces que

$$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1) \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin(1) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Al ser $\arcsin(x)$ continua entonces $\sin(x)$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Al ser $\arcsin(x)$ creciente entonces $\sin(x)$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Al ser $\arcsin(x)$ impar entonces $\sin(x)$ es impar en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Lema 1. La función $\sin(x)$ es diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Demostración. Tenemos que la función $y = \arcsin(x)$ es diferenciable en $(-1, 1)$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Dado que $x = \sin(y)$ es diferenciable $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sin(y)) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}} = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$$

□

Función Coseno (x)

Definición 4. Definimos la función $\cos(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Se tiene que

$$\cos(-x) = \sqrt{1 - \sin^2(-x)} = \sqrt{1 - (-\sin(x))^2} = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \cos(x)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

$$\cos(0) = \sqrt{1 - (\sin(0))^2} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - \sin^2(x)}) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2(x)}}(-2\sin(x))(\sqrt{1 - \sin^2(x)}) = -\sin(x)$$



Teorema 2. Las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ satisfacen

$$(a) \text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$$

$$(b) \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$(c) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}(x)$$

$$(d) \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\text{sen}(x)$$

Demostración. Para (a)

Sean $z = x + y$ entonces

$$\frac{d}{dt}(\text{sen}(t)\cos(z-t) + \cos(t)\text{sen}(z-t)) =$$

$$(\text{sen}(t))(-\text{sen}(z-t)(-1)) + \cos(z-t)\cos(t) + (\cos(t))(-\cos(z-t)) + \text{sen}(z-t)(-\text{sen}(t)) = 0$$

Por lo tanto

$$\text{sen}(t)\cos(z-t) + \cos(t)\text{sen}(z-t) = K, \text{ (constante)}$$

si hacemos $t = 0$

$$\text{sen}(z) = k$$

Si hacemos $t = x$

$$\text{sen}(x)\cos(z-x) + \cos(x)\text{sen}(z-x) = \text{sen}(z)$$

y como $z = x + y$

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$$

Para (b)

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x) + \text{sen}(-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Para (c)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \text{sen}(x)$$

Para (d)

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x + (-y)\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-y) + \text{sen}(-y)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\text{sen}(x) \end{aligned}$$

□