

Primera Parte Viernes 13/05/16. →

Trabajo Realizado por una fuerza variable a lo largo de una recta.

Si la fuerza que se aplica varía durante el proceso, como ocurre al comprimir un resorte la fórmula

$$T = W = \text{Trabajo} = \underbrace{F}_{\text{Fuerza}} d \longrightarrow \text{desplazamiento.}$$

Si queremos determinar el trabajo realizado en el intervalo $x=a$ a $x=b$.

Hacemos una partición de $[a, b]$ en la forma usual, elegimos un punto c_k en cada subintervalo

$$[x_{k-1}, x_k].$$

El trabajo total realizado de a a b se aproxima mediante la suma de Riemann:

$$T \approx \sum_{k=1}^n F(c_k) \Delta x_k$$

Definición:

El trabajo realizado por una fuerza variable $F(x)$ dirigida a lo largo del eje x de $x=a$ a $x=b$

es:

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

Las unidades si F es [Newtons] y x [metros]

W es [Joules].

Ejemplo:

1) Calcular el trabajo realizado por $F(x) = \frac{1}{x^2}$ newtons a lo largo del eje x de $x=1$ m a $x=10$ m.

Solución:

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}$$

Ley de Hooke para un resorte:

La fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud a partir de su longitud natural, es:

$$\text{Fuerza} = F = kx \quad [\text{Newtons}]$$

en resorte.

$k = \text{cte.} \equiv$ constante característica del resorte.

Ejercicio:

Determine el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 pie a una longitud de 0.75 pies, si la constante del resorte es $k = 16 \text{ lb/pie}$.

Solución:

Tenemos que la fuerza está dada por:

$$F(x) = kx = 16x$$

Para comprimir el resorte desde 0 hasta 0.25 pies, la fuerza debe aumentar de:

$$F(0) = (16)(0) = 0 \text{ lb}$$

$$F(0.25) = (16)(0.25) = 4 \text{ lb.}$$

$$\therefore W = \int_0^{0.25} 16x \, dx = 8x^2 \Big|_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-pie}$$

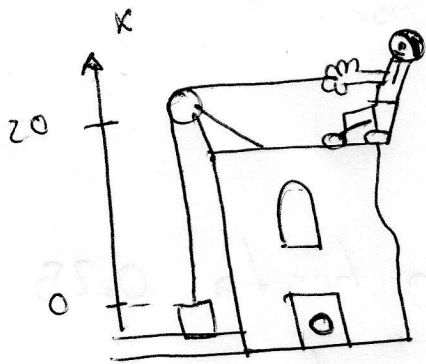
Ejercicio:

Trabajo realizado al subir una cuerda y una cubeta.

Una cubeta de 5 lb se eleva desde el piso, jalándola con una cuerda de 20 pies a una velocidad constante.

La cuerda pesa 0.08 lb/pie.

¿Cuánto trabajo se realiza al subir la cubeta y la cuerda?



Solución:

La cubeta tiene un peso constante, por lo que el trabajo realizado al elevar sólo la cubeta es:

$$\text{peso} \times \text{distancia} = 5 \cdot 20 = 100 \text{ lb-pie.}$$

El peso de la cuerda varía conforme se sube la cubeta, ya que hay menos cuerda colgando.

Cuando la cubeta se encuentra a x pies del piso, la parte de la cuerda que falta

por subir pesa $(0.08)(20-x)$ lb.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{Trabajo sobre la} &= \int_0^{20} (0.08)(20-x) dx \\ \text{cuerda} &= \int_0^{20} (1.6 - 0.08x) dx \\ &= [1.6x - 0.04x^2]_0^{20} \\ &= 32 - 16 = 16 \text{ lb-pies.}\end{aligned}$$

El trabajo total para la combinación cubeta

y cuerda es:

$$100 + 16 = 116 \text{ lb-pies.}$$