

Derivadas de Funciones Vectoriales

Generalizando un poco las ideas del cálculo diferencial de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recordemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto t_0 si existe una **función afín** $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = m(x - t_0) + f(t_0)$$

tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T(t)}{t - t_0} = 0$$

en tal caso decimos que T es la mejor aproximación afín a f en t_0 .

Definición 1. Suponga que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \text{Dom}_f$. Decimos que $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la mejor aproximación afín a f en t_0 si

$$a) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T(t)}{t - t_0} = 0$$

$$b) \quad T(t_0) = f(t_0)$$

Teorema 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, T_1, T_2 funciones afines a f . Si T_1 y T_2 son mejores aproximaciones afines de f en t_0 , entonces $T_1 = T_2$

Demostración. Supongamos que $T_1(t) = \overline{u}_1 + t\overline{v}_1$ y $T_2(t) = \overline{u}_2 + t\overline{v}_2$. Se tiene entonces que como T_1 y T_2 son aproximaciones afines $T_1(t_0) = f(t_0) = T_2(t_0)$.

Por otro lado $T_1(t_0) = \overline{u}_1 + t_0\overline{v}_1$ y $T_2(t_0) = \overline{u}_2 + t_0\overline{v}_2$

$$\therefore \quad \overline{u}_1 + t_0\overline{v}_1 = \overline{u}_2 + t_0\overline{v}_2 \quad \therefore \quad \overline{u}_1 = \overline{u}_2 + t_0(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)$$

Además

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T_1(t)}{t - t_0} = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T_2(t)}{t - t_0} = 0 \\ \therefore & \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T_2(t)}{t - t_0} - \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T_1(t)}{t - t_0} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{T_1(t) - T_2(t)}{t - t_0} = 0 \\ \Rightarrow & \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{u}_1 + t\overline{v}_1 - (\overline{u}_2 + t\overline{v}_2)}{t - t_0} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overline{u}_2 + t_0(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) + t\overline{v}_1 - (\overline{u}_2 + t\overline{v}_2)}{t - t_0} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t(\overline{v_1} - \overline{v_2}) - t_0(\overline{v_1} - \overline{v_2})}{t - t_0} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(\overline{v_1} - \overline{v_2})}{t - t_0} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} - \overline{v_2} = 0 \Rightarrow \overline{v_1} = \overline{v_2}$$

sustituyendo en la ecuación

$$\overline{u_1} = \overline{u_2} + t_0(\overline{v_2} - \overline{v_1})$$

se obtiene $\overline{u_1} = \overline{u_2} \therefore T_1 = T_2$

□

Si $T(t) = t\overline{v} + \overline{u}$ y $f(t_0) = T(t_0)$ entonces

$$T(t) = t\overline{v} + \overline{u} = f(t_0) - T(t_0) + t\overline{v} + \overline{u} = f(t_0) + (t - t_0)\overline{v}$$

Definición 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $t_0 \in \mathbb{R}$. Si existe la mejor aproximación afín $T(t) = f(t_0) + (t - t_0)\overline{v}$ de f en t_0 , decimos que f es diferenciable en t_0 y el vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ es llamado la derivada (ó derivada total, primera derivada, vector velocidad) de f en t_0 . En tal caso escribimos

$$\overline{v} = f'(t_0)$$

Cuando T es la mejor aproximación afín de f en t_0 se tiene

$$T(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Teorema 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $t_0 \in \mathbb{R}$. f es diferenciable en el punto t_0 si y solo si cada función componente $x_i(t)$ de f es diferenciable en el punto t_0 , en cuyo caso

$$f'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0), \dots, x'_n(t_0))$$

Demostración. ($\Rightarrow$)

Supongamos que f es diferenciable en t_0 . Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$T(t) = f(t_0) + (t - t_0)\overline{v}$ la mejor aproximación afín de f en t_0 con $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - (t - t_0)\overline{v}}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} - v_1, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} - v_2, \dots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} - v_n \right) \end{aligned}$$

conforme $t \rightarrow t_0$ cada función componente tiende a 0 $\therefore$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} - v_i = 0$$

$\therefore$ cada f_i es diferenciable en t_0

($\Leftarrow$)

Supongamos que cada f_i es diferenciable en t_0 . Definimos $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$T(t) = f(t_0) + (t - t_0)(x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$$

Debemos comprobar que T es la mejor aproximación afín a f en t_0 . Es claro que $f(t_0) = T(t_0)$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - T(t)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0) - (t - t_0)(x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{x_2(t) - x_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{x_n(t) - x_n(t_0)}{t - t_0} \right) - (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} - x'_1(t), \dots, \frac{x_n(t) - x_n(t_0)}{t - t_0} - x'_n(t) \right) = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x_1(t) - x_1(t_0)}{t - t_0} - x'_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x_n(t) - x_n(t_0)}{t - t_0} - x'_n(t) \right) = (0, \dots, 0) = \bar{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto T es la mejor aproximación afín de f en t_0 $\therefore$ f es diferenciable en t_0

□