Derivadas de Funciones Vectoriales 2

Teorema 1. *Si f es una función vectorial continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b), entonces existe $C_i \,\epsilon\, (a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=(b-a)(f_1'(C_1),\dots,f_n'(C_n))$.*

Demostración: Por hipotesis f_i es continua y diferenciable, por lo tanto para cada f_i existe $C_i \,\epsilon\, (a,b)$ tal que $f_i'(C_i)=\dfrac{f_i(b)-f_i(a)}{b-a}$.

por lo tanto

$$f_i'(C_i)(b-a)=f_i(b)-f_i(a)$$

por lo tanto

$$f(b)-f(a)=(b-a)(f_1'(C_1),\dots,f_n'(C_n))$$

Teorema 2. *Si φ es diferenciable sobre un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ y f es diferenciable sobre un intervalo que contiene a $\varphi(I)=\{\varphi(t)|t\epsilon I\}$, entonces $f\circ\varphi$ es diferenciable en I y $(f\circ\varphi)'=f'\circ\varphi\cdot\varphi'$ sobre I*

Demostración: Tenemos que:

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi)' &= [(f_1\circ\varphi)',\dots,(f_n\circ\varphi)']\\ &= [f_1'\circ\varphi\cdot\varphi',\dots,f_n'\circ\varphi\cdot\varphi']\\ &= [f_1'\circ\varphi,\dots,f_n'\circ\varphi]\varphi'\\ &= f'\circ\varphi\cdot\varphi'\end{aligned}$$

Fórmula de Taylor

Si $f(t)=(f_1(t),f_2(t),...,f_n(t))$ es una función vectorial que es continua y diferenciable hasta $n+1-veces$ entonces para cada $i=1,...,n$ se tiene que

$$f_i(t+h)=f_i(t)+h\cdot f_i'(t)++\frac{h^2}{2!}\cdot f_i''(t)+...+\frac{h^n}{n!}\cdot f_i^n(t)+R_{in}$$

$$\therefore \quad f(t+h)=(f_1(t+h),f_2(t+h),...,f_n(t+h))=$$

$$(f_1(t)+h\cdot f_1'(t)++\frac{h^2}{2!}\cdot f_1''(t)+...+\frac{h^n}{n!}\cdot f_1^n(t)+R_{1n},...,f_n(t)+h\cdot f_n'(t)+\frac{h^2}{2!}\cdot f_n''(t)+...+\frac{h^n}{n!}\cdot f_n^n(t)+R_{1n})=$$

$$(f_1(t),...,f_n(t)) + h\cdot(f_1'(t),...,f_n'(t)) + \frac{h^2}{2!}(f_1''(t),...,f_n''(t)) + ... + \frac{h^n}{n!}(f_1^n(t),...,f_n^n(t))$$
$$= f(t) + h\cdot f'(t) + \frac{h^2}{2!}f''(t) + ... + \frac{h^n}{n!}f^n(t)$$

que es la fórmula de taylor para funciones vectoriales

Definición 1. *Si $f = (f_1,\dots,f_n)$ es una funcion vectorial definida sobre $[a,b]$, entonces* $\displaystyle\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1,\dots,\int_a^b f_n\right)$.

La integral existe siempre que cada una de las integrales $\displaystyle\int_a^b f_i$ *con* $i = 1,\dots,n$ *existe. En particular, si f es continua sobre $[a,b]$ entonces* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *existe.*

Teorema 3. *Si $f = (f_1,\dots,f_n)$ es continua sobre un intervalo I y $a\,\epsilon\, I$ entonces:*

$$\frac{d\displaystyle\int_a^t f}{dt} = f(t) \quad \forall \quad t\,\epsilon\, I$$

Demostración. La prueba se obtiene por la aplicación del primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes

$$\begin{aligned}\frac{d\displaystyle\int_a^t f}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f_1,\dots,\int_a^t f_n\right)\\ &\left(\frac{d}{dt}\int_a^t f_1,\dots,\frac{d}{dt}\int_a^t f_n\right)\\ &= (f_1(t),\dots,f_n(t))\\ &= f(t)\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Si $f = (f_1,\dots,f_n)$ tiene derivada continua sobre un intervalo I, entonces* $\forall \quad a,b\,\epsilon\, I$ $\displaystyle\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a)$

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_a^b f' &= \int_a^b (f_1', \ldots, f_n') \\ &= \left(\int_a^t f_1', \ldots, \int_a^t f_n'\right) \\ &= (f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a)) \\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

□

Teorema 5. *Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ es integrable en $[a, b]$, para todo vector $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces el producto escalar $C \cdot F$ es integrable en $[a, b]$ y*

$$C \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b C \cdot f(t)dt$$

Demostración. Tenemos que

$$C \cdot \int_a^b f(t)dt = (c_1, c_2, ..., c_n) \cdot \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt\right) =$$

$$\left(c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)dt + c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)dt + ... + c_n \cdot \int_a^b f_n(t)dt\right) =$$

$$\left(\int_a^b c_1 \cdot f_1(t)dt +, \int_a^b c_2 \cdot f_2(t)dt + ... + \int_a^b c_n \cdot f_n(t)dt\right) = \int_a^b C \cdot f(t)dt$$

□

Teorema 6. *Si f y $\|f\|$ son integrables en $[a, b]$ entonces*

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Demostración. Sea $C = \int_a^b f(t)dt$ por lo que se tiene

$$\|C\|^2 = C \cdot C = C \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b C \cdot f(t)dt \leq \int_a^b |C \cdot f(t)|dt \leq \int_a^b \|C\|\|f(t)\|dt$$

$$\therefore \quad \|C\|^2 \leq \int_a^b \|C\|\|f(t)\|dt \Rightarrow \|C\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \Rightarrow \left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

□