Operaciones con Funciones Vectoriales

Las operaciones usuales del algebra vectorial pueden aplicarse para combinar 2 funciones o una función vectorial con una función real.

Si f y g son funciones vectoriales y si u es una función real, teniendo todas un dominio común, definimos nuevas funciones $F+G$, uF y $F \cdot G$ mediante

a) $(F+G)(t) = F(t) + G(t)$

b) $uF(t) = u(t)F(t)$

c) $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$

d) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$ si $F, G \in \mathbb{R}^3$

e) Si $G = F \circ u$ entonces $G(t) = F(u(t))$

Límites de Funciones Vectoriales

El límite de una función vectorial se define mediante los límites de sus componentes

1.-Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función vectorial dada por $f(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j}$, y si $\lim_{t\to a} x_1(t)$ y $\lim_{t\to a} x_2(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t\to a} f(t) = \left(\lim_{t\to a} x_1(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to a} x_2(t)\right)\mathbf{j}$$

2.-Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función vectorial dada por $f(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$, y si $\lim_{t\to a} x_1(t)$, $\lim_{t\to a} x_2(t)$ y $\lim_{t\to a} x_3(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t\to a} f(t) = \left(\lim_{t\to a} x_1(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to a} x_2(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to a} x_3(t)\right)\mathbf{j}$$

Ejemplos: Encuentre

$$\lim_{t\to 0} r(t)$$

1.- Si $r(t) = (1+t^3)i + te^{-t}j + \frac{\sin t}{t}k$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \left(\lim_{t\to 0} 1+t^3, \lim_{t\to 0} te^{-t}, \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\right) = (1,0,1)$$

2.- Si $f(t) = (\frac{\sin t}{t}, t^2+t+3)$ entonces

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}, \lim_{t\to 0} t^2+t+3\right) = (1,3)$$

Definición 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial definida para todos los valores de t en alguna vecindad de un punto t_0, excepto quiza en t_0. Entonces se dice que el límite de la función f cuando t se acerca a t_0 es $\overline{a}$ y se expresa como*

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \overline{a}$$

si y solo si $\forall\ \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\|f(t) - a\| < \epsilon$ siempre que $|t - t_0| < \delta$

Ejemplo: Se sabe que

$$\lim_{t\to 2}(t,t) = (2,2)$$

Puesto que $\epsilon > 0$, determine $\delta > 0$ que verifique la validez del límite.

Tenemos que

$$\lim_{t\to 2}(t,t) = \left(\lim_{t\to 2} t, \lim_{t\to 2} t\right) = (2,2)$$

$\therefore$ Según la definición

$$\|(t,t) - (2,2)\| = \sqrt{(t-2)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{2(t-2)^2} = \sqrt{2}|t-2|$$

$$\therefore \quad si \quad \sqrt{2}|t-2| < \epsilon$$

podemos definir a $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$

Problema.- Si $f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ y $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ entonces demostrar que

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$$

Demostración: Si

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $\|f(t) - a\| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$. Asi que

$$f(t) - a = (f_1(t) - a_1)i + (f_2(t) - a_2)j + (f_3(t) - a_3)k$$

y para todo $0 < |t - t_0| < \delta$

$$|f_i(t) - a_i| < |f(t) - a| < \epsilon$$

entonces $|f_i(t) - a_i| < \epsilon$ por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$$

Reciprocamente, si

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$|f_i(t) - a_i| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{siempre que } 0 < |t - t_0| < \delta$$

Usando la desigualdad del triángulo

$$|f(t) - a| = |f_1(t) - a_1, f_2(t) - a_2, f_3(t) - a_3|$$

$$\leq |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + |f_3(t) - a_3| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a$$

En resumen, si $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t), \lim_{t\to t_0} g(t), \lim_{t\to t_0} h(t)\right)$$

en caso que existan los límites de las funciones componentes.

Teorema. Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función vectorial, entonces

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i$$

Donde $f(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$

Demostración:

Si

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|f(t) - L\| < \epsilon$. Pero como

$$\|f(t) - L\| = \|x_1(t) - l_1, \cdots, x_n(t) - l_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

se tiene que

$$|x_i(t) - l_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon$ por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i$$

Reciprocamente

Supongamos ahora que

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Esto quiere decir que $\forall\ \epsilon_i > 0\ \exists\ \delta_i > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon_i$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ tomamos $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$.

Para esta δ se tiene $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\ \forall\ i = 1, \cdots, n$, entonces

$$\|f(t) - L\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

Teorema.- Propiedades sobre límite.

Sean $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $a = (a_1, \cdots, a_n)$ $b = (b_1, \cdots, b_n)$

a) Si

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = b$$

entonces

$$\lim_{t\to t_0} f(t) + g(t) = a + b$$

Demostración: Si

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = b$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - a| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|g(t) - b| < \frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto

$$|f(t) + g(t) - (a + b)| = |f(t) - a + g(t) - b| \leq |f(t) - a| + |g(t) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to t_0} f(t) + g(t) = a + b$$

b)

$$\lim_{t\to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$$

Tenemos que $f(t) \cdot g(t) = f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + f_n(t) \cdot g_n(t)$ y como

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = b$$

entonces

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = a_i \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0} g_i(t) = b_i$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} f(t) \cdot g(t) &= \lim_{t\to t_0} f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + f_n(t) \cdot g_n(t) \\ &= \lim_{t\to t_0} f_1(t) \cdot g_1(t) + \cdots + \lim_{t\to t_0} f_n(t) \cdot g_n(t)\end{aligned}$$

$$= a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

$$= a \cdot b$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$$

c) Para $n = 3$

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \mathrm{x} g(t) = a \mathrm{x} b$$

Tenemos que

$$f(t) \mathrm{x} g(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

$$= [f_2(t) \cdot g_3(t) - g_2(t) \cdot f_3(t), f_1(t) \cdot g_3(t) - g_1(t) \cdot f_3(t), f_1(t) \cdot g_2(t) - g_1(t) \cdot f_2(t)]$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \mathrm{x} g(t)$$

$$= \lim_{t \to t_0} f_2(t) \cdot g_3(t) - g_2(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_3(t) - g_1(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_2(t) - g_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$= \lim_{t \to t_0} f_2(t) \cdot g_3(t) - \lim_{t \to t_0} g_2(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_3(t) - \lim_{t \to t_0} g_1(t) \cdot f_3(t), \lim_{t \to t_0} f_1(t) \cdot g_2(t) - \lim_{t \to t_0} g_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$= a_2 b_3 - b_2 a_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - b_1 a_2 = a \mathrm{x} b$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) \mathrm{x} g(t) = a \mathrm{x} b$$

d)

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = \|a\|$$

tenemos que $|\|f(t)\| - \|a\|| \leq \|f(t) - a\| \overset{*}{<} \epsilon$

$(*)$Como $\quad \lim_{t \to t_0} f(t) = a \quad$ entonces $\quad |f(t) - a| < \epsilon \quad$ siempre que $\quad 0 < |t - t_0| < \delta$

Por lo tanto $||f(t)| - |a|| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$, por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = \|a\|$$

Para precisar si

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L \quad \text{entonces} \quad \lim_{t \to t_0} |f(t)| = \lim_{t \to t_0} \left[f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{*}{=} \left[\lim_{t \to t_0} f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

(*) Por la continuidad de la función $\sqrt{\ }$

$$= \left[\left(\lim_{t \to t_0} f_1(t)\right)^2 + \left(\lim_{t \to t_0} f_2(t)\right)^2 + \left(\lim_{t \to t_0} f_3(t)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|L\|$$

Ejercicio: Se sabe que

$$\lim_{t \to 2} (t, t^3) = (2, 8)$$

Puesto que $\epsilon > 0$, determine $\delta > 0$ que verifique la validez del límite.

Tenemos que

$$\lim_{t \to 2} (t, t^3) = \left(\lim_{t \to 2} t, \lim_{t \to 2} t^3\right) = (2, 8)$$

Por lo tanto $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1, \delta_2$ tal que si $0 < |t - 2| < \delta_1 \Rightarrow |t - 2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y además si $0 < |t - 2| < \delta_2 \Rightarrow |t^3 - 8| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, entonces tomamos $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \delta_2)$.

Por lo tanto si

$$0 < |t - 2| < \delta \Rightarrow \|(t, t^3) - (2, 8)\| = \sqrt{(t - 2)^2 + (t^3 - 8)^2} < \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to 2} (t, t^3) = (2, 8)$$

Funciones Acotadas.- Se dice que una función $f(t)$ es acotada en un intervalo I si existe un escalar $M > 0$ tal que $\|f(t)\| < M \ \forall\ t \in I$

Ejercicio.- Demostrar que si $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L$ entonces f es acotada en $0 < |t - t_0| < \delta$

Demostración: Supongamos que $f(t) \to L$ cuando $t \to t_0$. Entonces para un $\epsilon > 0$ arbitrario, $\exists\ \delta > 0$ tal que $|f(t) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$.

Entonces $\|f(t)\| = \|f(t) - L + L\| \leq \|f(t) - L\| + \|L\| < \epsilon + \|L\|$

por lo tanto basta tomar $M = \epsilon + \|L\|$

Ejercicio.- Si $f(t)$ es acotada en t_0 y $g(t) \to 0$ cuando $t = t_0$, demostrar que $f(t) \mathrm{x} g(t) \to 0$ cuando $t \to t_0$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ arbitrario como $f(t)$ es acotada en t_0 $\exists\ M > 0$ y un $\delta_1 > 0$ tal que $\|f(t)\| < M \ \forall\ \delta \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Por otro lado si $g(t) \to 0$ cuando $0 < |t - t_0| < \delta_2$, entonces $\|g(t)\| < \frac{\epsilon}{M}$. Por lo que al tomar $\delta =$**min**$\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $0 < |t - t_0| < \delta$ entonces $0 < |t - t_0| < \delta_1$ y $0 < |t - t_0| < \delta_2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(t) \mathrm{x} g(t) - 0| &= |f(t) \mathrm{x} g(t)| = |f(t)|\ |g(t)|\ |\sin(f, g)| \\ &\leq |f(t)|\ |g(t)| \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(t) \mathrm{x} g(t) \to 0$ cuando $t \to t_0$

Ejercicio.- Sea $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = L$, $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = M$ y $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = N$.

Entonces $\lim\limits_{t \to t_0} [fgh] = [LMN]$ donde $[abc] = \overline{a} \cdot \overline{b} \mathrm{x} \overline{c}$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} [fgh] &= \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot (g(t) \mathrm{x} h(t)) \\ &= \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot \lim_{t \to t_0} g(t) \mathrm{x} h(t) \\ &= \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot \lim_{t \to t_0} g(t) \mathrm{x} \lim_{t \to t_0} h(t) \\ &= L \cdot M \mathrm{x} N = [LMN] \end{aligned}$$

Ejercicio.- Si $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = a$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = c$ entonces demostrar que $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t)f(t) = ca$

Demostración: Si $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = a$ y $\lim\limits_{t\to t_0} \phi(t) = c$, entonces para $0 < \epsilon_0 < 1$ $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$ entonces $|f(t) - a| < \epsilon_0$ y $|\phi(t) - c| < \epsilon_0$

Por otro lado se tiene que

$$|\phi(t)| = |c + \phi(t) - c| \leq |c| + |\phi(t) - c| < |c| + \epsilon_0 < |c| + 1$$

y al escribir

$$\begin{aligned} \phi(t)f(t) - ca &= \phi(t)f(t) - \phi(t)a + \phi(t)a - ca \\ &= \phi(t)[f(t) - a] + a[\phi(t) - c] \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\phi(t)f(t) - ca\| &= \|\phi(t)[f(t) - a] + a[\phi(t) - c]\| \\ &\leq |\phi(t)|\|f(t) - a\| + \|a\|\|\phi(t) - c\| \\ &< (|c| + 1)\epsilon_0 + \|a\|\epsilon_0 = \epsilon_0(|c| + 1 + \|a\|) \end{aligned}$$

Por lo tanto basta tomar

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{(|c| + 1 + \|a\|)}$$