Teorema de la Función Inversa

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real con derivada continua sobre un conjunto abierto A y sea x_0 un punto de A donde $f'(x_0) \neq 0$.
Considere la función $F(x, y) = y - f(x)$ y calculemos sus derivadas parciales. Así

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(x) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1$$

Nótese que F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ son continuas sobre el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$$

Considere ahora como solución inicial el punto (x_0, y_0) donde $y_0 = f(x_0)$. Tenemos que

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

De manera que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implicita. Luego entonces cerca del punto (x_0, y_0) la variable x puede representarse en términos de la variable y. Estos expresado formalmente nos dice que existe una única función implicita $x = g(y)$ con dominio un intervalo $J = (y_0 - k, y_0 + k)$ y con rango $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ tal que

$$g(y_0) = x_0$$

y, para toda y, en el intervalo J

$$F(g(y), y) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y) \neq 0$$

ademas, g y su derivada g' son continuas sobre J, y

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)} = -\frac{1}{-f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

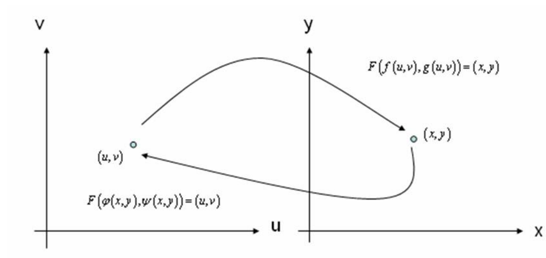
La función g que ha sido determinada no es otra que la función inversa

Ejemplo Sea f la función definida por la regla de correspondencia $f(x) = -x^5 - x$. Si calculamos su derivada, tenemos $f'(x) = -5x^4 - 1$. Observese que $f'(x) < 0$ para toda x en los reales, por lo que f es decreciente sobre toda la recta real y a su vez es uno a uno.
Concluimos así que la inversa de f está definida sobre toda la recta real y que su gráfica es decreciente. Sin embargo, no se puede obtener la regla de correspondencia para la inversa. Sin embargo, podemos calcular su derivada. Sea y cualquier número real y supóngase que x es tal que $f^{-1}(y) = x$. Así

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{5x^4 + 1}$$

Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Para el caso de una funcion $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se tiene



Nuestro problema es, dadas las funciones $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$ que describen a x, y como funciones de u, v, cuando es posible establecer "funciones inversas"que describen a u y v como funciones de x, y. Es decir queremos tener

$$(F^{-1} \circ F)(u, v) = F^{-1}(F(u, v)) = F^{-1}(x, y) = F^{-1}(f(u, v), g(u, v)) = (u, v)$$

$$(F \circ F^{-1})(x, y) = F(F^{-1}(x, y)) = F(u, v) = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = (x, y)$$

Un caso particular del Teorema general de la función implícita es el Teorema de la función inversa.
Dado un sistema de n-ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{array}\right\} \text{Tratamos de resolver las n-ecuaciones para } x_1, x_2, ...x_n \text{como funciones de } y_1, y_2, ...y_n.$$

Esto es, estamos tratando de invertir las ecuaciones del sistema anterior, que es algo análogo a formar los inversos de funciones como $senx = y$ y $e^x = y$, sólo que esta vez se intentará con funciones de varias variables. La cuestión de existencia se responde por medio del teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ con las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$. La condición de existencia para la solución en una vecindad del punto x_0 es que el determinante de la matriz $Df(x_0)$ y $f = (f_i, f_2, ...f_n)$ sean distintos de cero. Explicitamente:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)} \Bigg|_{x=x_0} = J(f)(x_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Mas aún, si consideramos las expresiones:

$$\begin{array}{c} G(x, y, u, v) = x - f(u, v) = 0 \\ H(x, y, u, v) = y - g(u, v) = 0 \end{array}$$

Lo que pretendemos es "despejar"de ella a u y v en términos de x e y y poder establecer así las funciones $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$. Entonces el T.F.Im. (tercera versión) nos da las condiciones para que podamos hacer esto. Sea $P = (x, y, u, v)\epsilon\mathbb{R}^4$ un punto tal que $G(p) = H(p) = 0$. Supongamos que en una bola de centro en P las derivadas parciales de G y H son continuas. Si el jacobiano $\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)} \neq 0$ en P, entonces es posible "despejar"de ellas a u y v en terminos de x e y, y establecer así funciones $u = \varphi(x, y), v = \varphi(x, y)$ definidas en una vecindad V de $(x, y) = F(u, v)$, las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se pueden calcular como

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((x,v)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} & \dfrac{\partial H}{\partial v}\end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((y,v)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} & \dfrac{\partial H}{\partial v}\end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ 1 & -\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((u,x)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial x}\end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial u} & 1 \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & 0\end{vmatrix} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial((u,y)}}{\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial u} & 0 \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

En resumen tenemos: Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sean $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$. Suponga que alguna bola B de $\mathbb{R}^2$ con centro (u,v), las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ son continuas. Si el jacobiano $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ es no nulo en (u,v) entonces $\exists$ una vecindad V de $\bar{x}, \bar{y}$ donde podemos definir "funciones inversas"$u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ es decir tales que $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$, y $f(\varphi(x,y), \psi(x,y)) = x, g(\varphi(x,y), \psi(x,y)) = y$ para $(x,y) \epsilon V$ las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se calculan como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \qquad (*)$$

Dada la función inversa $F^{-1}(x,y)$. Esta tiene por funciones coordenadas a las funciones $u = \varphi(x,y)$. Es decir $F^{-1}(x,y) = (u,v) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$. La matrix jacobiana de esta función es:

$$JF^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

El resultado anterior $(*)$ nos dice como calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en una vecindad V de (x,y) al sustituir las fórmulas correspondientes en JF^{-1}, recordando que $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = det(JF)$.

$$JF^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{det(JF)} & -\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)} \\ -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{det(JF)} & \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial U}}{det(JF)} \end{vmatrix} = \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix}$$

Multipliquemos JF y JF^{-1}, se obtiene

$$(JF)(JF^{-1}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{det(JF)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así concluimos que la matriz jacobiana de la función inversa de F es justamente la inversa de la matriz jacobiana de F. Es decir se tiene

$$JF^{-1} = (JF)^{-1}$$

Teorema de la Función Inversa

Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^n$. Sea $F(p) = q$ donde $p = (x_1, ..., x_n)$ y $q = (y_1, ..., y_n)$. Suponga que en una bola $B \in \mathbb{R}^n$ con centro p, F es clase C^1 y $det JF(p) \neq 0$. Entonces hay una bola $B' \in \mathbb{R}^n$ con centro q en la que se puede definir la función inversa de F, F^{-1} la cual es de clase C^1 y $JF^{-1}(y) = [JF(x)]^{-1}$ donde $y = F(x) \in B'$

Ejemplo Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = \left(\int_x^y g(t)dt, \int_y^{x^2} g(t)dt\right)$. Demuestre que esta función tiene una inversa F^{-1} definida en una bola B del origen de coordenadas. Determine JF^{-1}

Tenemos que:

$$f_1(x, y) = \int_x^y g(t)dt = \int_x^a g(t)dt + \int_a^y g(t)dt = -\int_a^x g(t)dt + \int_a^y g(t)dt$$

$\therefore$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -g(x) \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = g(y)$$

Análogamente

$$f_2(x, y) = \int_y^{x^2} g(t)dt = \int_y^a g(t)dt + \int_a^{x^2} g(t)dt = -\int_a^y g(t)dt + \int_a^{x^2} g(t)dt$$

$\therefore$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2xg(x^2) \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -g(y)$$

Por lo tanto

$$JF = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -g(x) & g(y) \\ g(x^2)2x & -g(y) \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} -g(0) & g(0) \\ g(0^2)2 * 0 & -g(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Por lo tanto en los alrededores del (0,0) podemos definir "funciones inversas". Ahora para calcular JF^{-1} tenemos que

$$JF^{-1} = (JF)^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \underbrace{=}_{*} \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

* Recordando que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$