Teorema de la Función Inversa

Teorema 1. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^n$. Sea $F(p) = q$ donde $p = (x_1, ..., x_n)$ y $q = (y_1, ..., y_n)$. Suponga que en una bola $B \in \mathbb{R}^n$ con centro p, F es clase C^1 y $detJF(p) \neq 0$. Entonces hay una bola $B' \in \mathbb{R}^n$ con centro q en la que se puede definir la función inversa de F, F^{-1} la cual es de clase C^1 y $JF^{-1}(y) = [JF(x)]^{-1}$ donde $y = F(x) \in B'$*

Ejemplo Considere las ecuaciones

$$x = u + v + e^w$$
$$y = u + w + e^{2v}$$
$$x = v + w + e^{3u}$$

para $p = (u, v, w) = (0, 0, 0)$ se tiene que $q = (x, y, z) = (1, 1, 1)$ el determinante de la matriz jacobiana de la función $F(u, v, w))(x, y, z)$ es:

$$detJF = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^w \\ 1 & 2e^{2v} & 1 \\ 3e^{3u} & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si calculamos su determinante obtenemos

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (2-1) - 1 \times (1-3) + 1 \times (1-6) = 1 + 2 - 5 = -2 \neq 0$$

$\therefore$ Podemos localmente invertir la función F, entorno al punto q, donde podemos definir funciones de clase c^1 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$. Ahora bien como

$$JF^{-1}(q) = [JF(p)]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \underbrace{=}_{*} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

* Vamos a calcular la inversa usando la matriz de cofactores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponiendo la ultima matriz tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ las parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}(p) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(p) = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial y}(p) = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial z}(p) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(p) = \frac{5}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial y}(p) = -1 \quad \frac{\partial w}{\partial z}(p) = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido un problema de función inversa. Los coeficientes a_i son funciones conocidas de las n raices r_j. ¿Se podran expresar las raices como funciones de los coeficientes en alguna región?. Con n=3, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y enunciar la conclusión acerca de la posibilidad de hacer lo planteado.

Solución Para el caso n=3 tenemos que podemos factorizar el polinomio de la siguiente forma

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

desarrolando el lado derecho tenemos que

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - r_3x^2 - r_2x^2 + r_2r_3x - r_1x^2 + xr_1r_3 + r_1r_2x - r_1r_2r_3$$

que se puede escribir

$$x^3 + x^2(-r_3 - r_2 - r_1) + x(r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2) - r_1r_2r_3$$

igualando las expresiones

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 + x^2(-r_3 - r_2 - r_1) + x(r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2) - r_1r_2r_3$$

por lo tanto igualando coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= -r_1r_2r_2 \\ a_1 &= r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2 \\ a_2 &= -r_1 - r_2 - r_3 \end{aligned}$$

Al sistema anterior le aplicamos el teorema de la función implicita para comprobar si las raices se pueden expresar en términos de los coeficientes, para ello calculamos el determinante de jacobiano del sistema que en este caso es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial r_1} & \frac{\partial a_0}{\partial r_2} & \frac{\partial a_0}{\partial r_3} \\ \frac{\partial a_1}{\partial r_1} & \frac{\partial a_1}{\partial r_2} & \frac{\partial a_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial r_1} & \frac{\partial a_2}{\partial r_2} & \frac{\partial a_3}{\partial r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3 + r_2 & r_3 + r_1 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de esta manera el determinante del jacobiano es

$$\det\begin{pmatrix} -r_1r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3+r_2 & r_3+r_1 & r_2+r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -r_1r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3+r_2 & r_3+r_1 & r_2+r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-r_2r_3)\times\begin{vmatrix} r_3+r_1 & r_2+r_1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-r_1r_3)\times\begin{vmatrix} r_3+r_2 & r_2+r_1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-r_1r_2)\times\begin{vmatrix} r_3+r_2 & r_3+r_1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-r_2r_3)\times(r_2-r_3)+(r_1r_3)\times(r_1-r_3)-(r_1r_2)\times(r_1-r_2) = -r_2r_3r_2+r_2r_3r_3+r_1r_3r_1-r_1r_3r_3-r_1r_2r_1+r_1r_2r_2$$

que se puede escribir

$$= r_3r_1r_1 - r_3r_1r_3 - r_3r_2r_1 + r_3r_2r_3 - r_2r_1r_1 + r_2r_1r_3 + r_2r_2r_1 - r_2r_2r_3$$

$$= (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)r_1 - (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)r_3 = (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)(r_1 - r_3)$$

$$= ((r_3 - r_2)r_1 - (r_3 - r_2)r_2)(r_1 - r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$$

Este último término no es cero si el polinomio tiene raices distintas. Así el teorema de la función inversa muestra que las raices se pueden hallar como funciones de los coeficientes en alguna vecindad de cualquier punto en el que las raices sean distintas. Esto es, si las rices $r_1,\ r_2,\ r_3$ de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, entonces hay vecindades V de $(r_1,\ r_2,\ r_3)$ y W de $(a_0,\ a_1,\ a_2)$ tales que las raices en V son funciones de los coeficientes en W.