Guía para el 2do examen parcial

1.-Considera la sucesión

$$\overline{x}_n = \left(\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{n^5+3}{2^n+1}, \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} \right)$$

a) ¿Tiene límite?
b) ¿Está acotada?
c) El conjunto de sus términos ¿es un conjunto compacto ?
2.- Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^4}} = 0$$

3.-Sean

$$c = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \quad c_{12} = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), \quad c_{21} = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

Dar un ejemplo donde se cumpla
a) $c = c_{12} = c_{21}$
b) $c\ \nexists$, $c_{12} \neq c_{21}$
c) $c = c_{12}$ pero $c_{21}\ \nexists$
d) $c\ \exists$ pero $c_{12}\ \nexists$ y $c_{21}\ \nexists$
e) $c\ \nexists$ pero $c_{12} = c_{21}$
4.-Demostar lo siguiente: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Entonces $f^{-1}(v) = \{x \in D \mid f(x) \in v\}$ es un abierto (contenido en D) para cada abierto $v \subset \mathbb{R}^m$.
5.-Demostrar lo siguiente : Sea (E, d_E), (F, d_F) dos espacios métricos $f : E \to F$ es continua en E si y solo si $\forall\ A \subset E\ \ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
6.-Demostrar lo siguiente: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Si $k \subset \Omega$ es compacto, entonces $f(k)$ es compacto.
7.-Demostrar lo siguiente : Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y $k \subset \Omega$ un compacto. Entonces f es acotada en k ademas existen $x_1, x_2 \in k$ tal que $f(x_1) = \mathbf{sup} f(k)$ y $f(x_2) = \mathbf{inf} f(k)$.
8.-demostrar lo siguiente: Si f es continua en X y X es un conjunto conexo en (E, d_E), entonces $f(x)$ es tambien conexo.
9.-Probar que el conjnuto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$$

es un conjunto abierto
10.-Demostrar lo siguiente: Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.