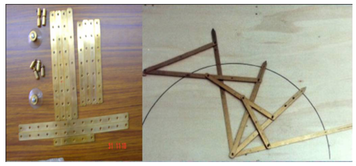
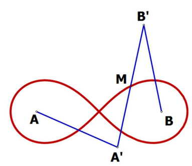
Mecanismos Articulados

Mecanismo Articulado.-Es un aparato mecánico que consiste en barras rígidas metálicas que se pueden unir con ejes en sus extremos o a lo largo de la barra, que les permiten girar libremente.



La Lemniscata de Bernoulli

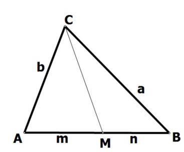
Un ejemplo de una curva que se puede trazar con un mecanismo tres-barras es la
Lemniscata de Bernoulli



Vamos a demostrar que este mecanismo articulado de tres-barras dibuja en efecto una Lemniscata.

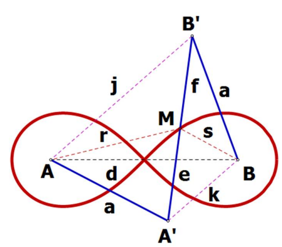
Definición 1. *Los puntos sobre la lemniscata satisfacen: El producto de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante*

Necesitaremos otra herramienta conocida como El Teorema de Apolonio ó Teorema de Stewart, que dice que en cualquier triángulo $\triangle ABC$ se cumple la siguiente relación



$$m \cdot a^2 + n \cdot b^2 = c \cdot CM^2 + m \cdot n^2 + n \cdot m^2$$

Según el teorema de Apolonio se tiene que en el triángulo $\triangle AA'B'$



$$e \cdot j^2 + f \cdot a^2 = A'B' \cdot r^2 + e \cdot f^2 + f \cdot e^2$$

$$\frac{d}{2} \cdot j^2 + \frac{d}{2} \cdot a^2 = d \cdot r^2 + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{d}{2}\left(j^2 + a^2\right) = \frac{d}{2}\left(2 \cdot r^2 + \frac{d^2}{2}\right)$$

$$j^2 + a^2 = 2 \cdot r^2 + \frac{d^2}{2}$$

$$j^2 = 2 \cdot r^2 \Rightarrow j = \sqrt{2} \cdot r$$

Analogamente se demuestra que

$$k = \sqrt{2} \cdot s$$

Según Ptolomeo
La suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de las diagonales

$$\therefore \quad j \cdot K + a \cdot a = d \cdot (e + f)$$

$$j \cdot K + a^2 = d^2$$

$$\sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot s + a^2 = 2 \cdot a^2$$

$$r \cdot s = \frac{a^2}{2}$$

$\therefore$ $r \cdot s$ es constante, así la curva descrita por M es el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos es constante (Lemniscata)