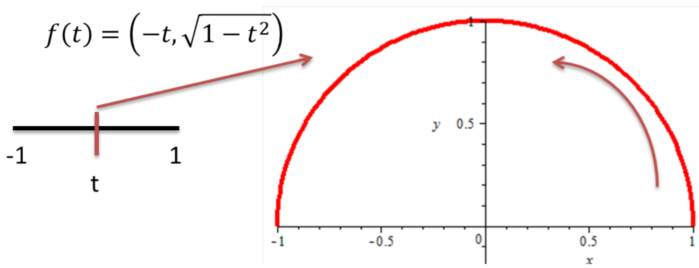
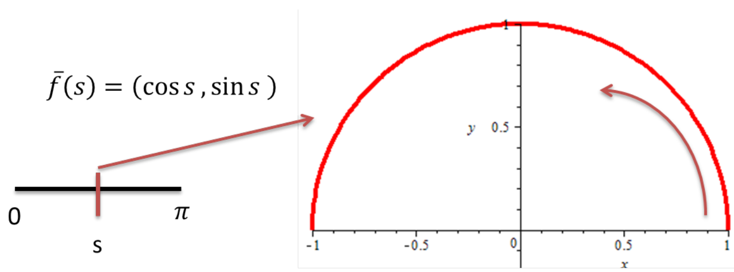
Reparametrización de curvas

Ejemplo: Consideremos la curva $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2})$ la cual describe un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ entre -1 y 1.

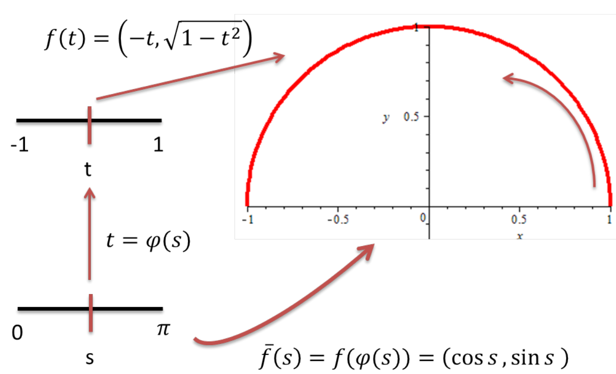


Sea $\overline{f} : [0, \pi] \to [0, pi]$ la función $\overline{f}(s) = [\cos(s), \sin(s)]$



Si definimos una función $\varphi : [0.\pi] \to [-1, 1]$ dada por $\varphi(s) = -cos(s)$ tenemos que $\overline{f} = f \circ \varphi$, es decir

$$\overline{f}(s) = f \circ \varphi(s) = f(\varphi(s)) = f(-cos(s)) = [-(-cos(s)), \sqrt{1 - (-\cos(s))^2}] = [cos(s), \text{sen}(s)]$$



Decimos que $\overline{f}$ es una reparametrización de f

Definición Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R}^n$ una curva con derivada distinta de cero. Sea $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una función con derivada continua sobreyectiva tal que $\varphi' \neq 0$ $\forall s \in [a,b]$. Entonces la curva $g = f \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ se llama reparametrización de la curva f

Observación: La condición $\varphi' \neq 0$ nos conduce a $\varphi' > 0$ o $\varphi' < 0$. Si $\varphi' > 0$ entonces φ es una función creciente en [c,d] de modo que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(c) = b$ y asi los puntos inicial y final de g coinciden con los respectivos de f

$$g(c) = f \circ \varphi(c) = f(\varphi(c)) = f(a) \quad g(d) = f \circ \varphi(d) = f(\varphi(d)) = f(b)$$

como $g'(s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s))$ entonces f' y g' tienen la misma dirección y en este caso, entonces, el camino g recorre la curva descrita por f en la misma dirección. En este caso g es una reparametrización que conserva la orientación

Ejemplo: Obtenga una reparametrización de la curva $f : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (3t+2, t^3+3)$

Solución: Proponemos $t = \varphi(s) = 2s$ para la cual $\varphi'(s) = 2 > 0$ no se anula para ningun valor. Ahora bien si $t = 0 \Rightarrow s = 0$ y $t = 2 \to s = 1$ por lo tanto $\varphi : [0,1] \to [0,2]$ mientras que

$$g(s) = f(\varphi(s)) = f(2s) = (3(2s) + 2, (2s)^3 + 3) = (6s + 2, 8s^3 + 3) \quad s \in [0,1]$$

tenemos entonces que g es una reparametrización de f. Vamos a comprobar que representan el mismo lugar geométrico. Para $f(t)$ se tiene $x = 3t+2 \to t = \frac{x-2}{3}$ y si $y = t^3+3$ entonces $y = \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + 3$ mientras que para $g(s)$ $x = 6s + 2 \to s = \frac{x-2}{6}$ por tanto si $y = 8s^3 + 3$ entonces $y = \left(\frac{x-2}{6}\right)^3$ igualando coordenadas

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + 3 = \left(\frac{x-2}{6}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{3^3} = \frac{8}{6^3}$$

lo cual es cierto por lo tanto representan el mismo lugar geometrico

Ejemplo: Obtenga una reparametrización de la curva $f : [0,3] \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(t) = (te^t, e^{-t}, t)$

Solución: Proponemos $t = \varphi(s) = 3s$ para la cual $\varphi'(s) = 3 > 0$ no se anula para ningun valor. Ahora bien si $t = 0 \Rightarrow s = 0$ y $t = 3 \to s = 1$ por lo tanto $\varphi : [0,1] \to [0,3]$ mientras que

$$g(s) = f(\varphi(s)) = f(3s) = (3se^{3s}, e^{-3s}, 3s) \quad s \in [0,1]$$

tenemos entonces que g es una reparametrización de f. Vamos a comprobar que representan el mismo lugar geométrico. Para $f(t)$ se tiene $y = e^{-t} \to t = -\ln(y)$ y si $x = te^t$ entonces $x = -\ln(y)e^{-\ln(y)} \Rightarrow x = \frac{-\ln(y)}{y}$ mientras que para $g(s)$ $y = e^{-3s} \to s = -\frac{\ln(y)}{3}$ por tanto si $x = 3se^{3s}$ entonces

$$x = 3\left(-\frac{\ln(y)}{3}\right) e^{3\left(-\frac{\ln(y)}{3}\right)} = -\ln(y)e^{-\ln(y)} = -\frac{\ln(y)}{y}$$

por lo tanto representan el mismo lugar geometrico en el plano, mientras que para la coordenada en z, hay una correspondencia biunivoca entre $f_3(t) = t$ para $t \in [0,3]$ y $g_3(s) = 3s$ para $s \in [0,1]$ y por lo tanto f y g representan el mismo lugar geometrico

Función Longitud de Arco

Si al extremo final de la curva $L(t) = \int_a^t \|f'(t)\|dt$ se deja variable, entonces el límite superior de la integral depende del parámetro t, y se tiene que la longitud de arco de una curva es función de la variable escalar t o sea $L(t) = \int_a^t \|f'(t)\|dt$ entonces $L(t)$ define un nuevo parámetro para c al que se denomina parámetro de longitud de arco.

Reparametrización por Longitud de Arco

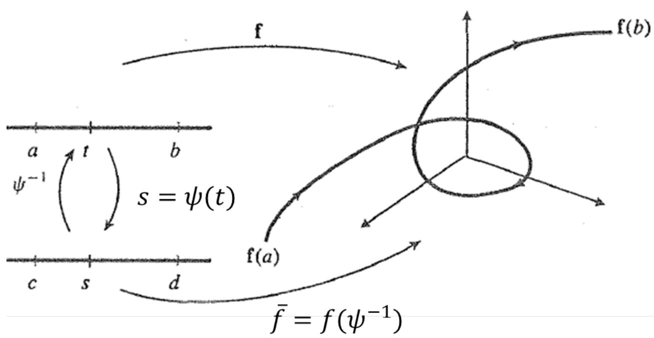
Sea

$$s = \psi(t) = \int_a^t \|f'(u)\|du$$

Noetemos que

$$\psi'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

es decir que como función de t ψ es creciente y por tanto biyectiva, en consecuencia exite ψ^{-1}.
Vamos ahora a considerar esta función ψ para dar una reparametrización de una función f dada.



Tenemos entonces que

$$\overline{f}'(s) = \left(f \circ \psi^{-1}\right)'(s) = f'(\psi^{-1}(s))(\psi^{-1})'(s) = f'(t)\frac{1}{\psi'(t)} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

por lo que

$$\|\overline{f}'(s)\| = 1$$

Definición 1. *Dada una curva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ diremos que $\overline{f}$ es una reparametrización por longitud de arco de f si $\|\overline{f}'\| = 1$*

Ejemplo: Sea $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Obtengamos la reparametrizacion por la longitud de arco.

$$s = L(t) = \int_0^t \|f'(t)\|dt = \int_0^t \sqrt{r^2(\cos^2(t) + \sin^2 t)}dt = \int_0^t rdt = rt$$

Entonces $s = rt$, por lo tanto $\frac{s}{r} = t$.

Entonces el camino $\bar{f}(s) = f(\frac{r}{s}) = (r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r}))$ es la reparametrización por la longitud de arco.

Observe que $\|\bar{f}'(s)\| = \| - r\sin(\frac{s}{r})\frac{1}{r}, r\cos(\frac{s}{r})\frac{1}{r}\| = \| - \sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\| = 1 \ \forall \ s \in I$, como tenia que ocurrir.

Ejemplo: Reparametrice la hélice $r(t) = \cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath} + t\hat{k}$ con respecto a la longitud de arco.

Solución.

$$s = s(t) = \int_0^t \|r^2(t)\|dt = \int_0^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}dt = \int_0^t \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}\ t$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{2}\ t \quad \text{Por lo tanto} \quad \frac{s}{\sqrt{2}} = t \quad \text{y } t \text{ esta en función de } s.$$

Por lo tanto la parametrización requerida es

$$\bar{r}(t) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$\|\bar{r}'(s)\| = \sqrt{\left[-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{como tenia que ser.}$$

Ejemplo: Obtenga la reparametrización de la catenaria $f(t) = (t, \cosh(t))$

Solución. Tenemos que:

$f'(t) = (1, \sinh(t))$ por lo tanto $\|f'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)}$ de la identidad $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ tenemos que:

$$\|f'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t)$$

$$\Rightarrow s = \int_0^t \|f'(t)\|dt = \int_0^t \cosh(t) = \sinh(t) - \sinh(0) = \sinh(t)$$

$$\text{Por lo tanto} \quad s = \sinh(t) \quad \text{y} \quad \underbrace{\operatorname{arcsin h}(s) = t}_{*}$$

Recordemos que si $s = \sinh(t)$, entonces:

$$s = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow \quad 2s = e^t - e^{-t} \Rightarrow \quad 2se^t = e^{2t} - 1 \Rightarrow \quad e^{2t} - 2se^t - 1 = 0$$

y resolviendo esta última como una ecuación cuadrática de 2^{do} grado en e^t tenemos que:

$$e^t = \frac{2s\sqrt{4s^2+4}}{2} = s + \sqrt{s^2+1} \Rightarrow e^s = s + \sqrt{s^2+1}$$

Por lo tanto $\quad s = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \Rightarrow t = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)$

Por lo tanto la reparametrización por longitud de arco es:

$$\bar{f}(s) = \left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right),\ \cosh\left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)\right)$$

y

$$\|f^{-1}(s)\| =$$

$$\left\| \frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}} \left[1 + \frac{2s}{2\sqrt{s^2+1}}\right],\ \sinh\left(\underbrace{\ln\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)}_{*}\right) \left[\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}\right]\left[1 + \frac{2s}{2\sqrt{s^2+1}}\right] \right\| =$$

$$\left\| \frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}} \left[\frac{\sqrt{s^2+1}\ + s}{\sqrt{s^2+1}}\right],\ \sinh(\operatorname{arcsin}(s)) \left[\frac{1}{s+\sqrt{s^2+1}}\right]\left[\frac{\sqrt{s^2+1}\ + s}{\sqrt{s^2+1}}\right] \right\| =$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{s^2+1}},\ \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \right\| = \sqrt{\frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2}{s^2+1}} = \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+1}} = \sqrt{1} = 1$$