Regla de la Cadena

Ejemplo Dadas $g(x,y)=(xy,5x,y^3)$ y $f(x,y,z)=(3x^2+y^2+z^2,5xyz)$. Calcular $JF\circ g$

Solución En este caso

$$Jf(g)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(xy,5x,y^3)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(xy,5x,y^3)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial(3x^2+y^2+z^2)}{\partial x}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial(3x^2+y^2+z^2)}{\partial y}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial(3x^2+y^2+z^2)}{\partial z}(xy,5x,y^3)\\ \frac{\partial(5xyz)}{\partial x}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial(5xyz)}{\partial y}(xy,5x,y^3) & \frac{\partial(5xyz)}{\partial z}(xy,5x,y^3)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}6x\,\big|_{(xy,5x,y^3)} & 2y\,\big|_{(xy,5x,y^3)} & 2z\,\big|_{(xy,5x,y^3)}\\ 5yz\,\big|_{(xy,5x,y^3)} & 5xz\,\big|_{(xy,5x,y^3)} & 5xy\,\big|_{(xy,5x,y^3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6xy & 10x & 2y^3\\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y\end{pmatrix}$$

Mientras que

$$Jg=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial(xy)}{\partial x} & \frac{\partial(xy)}{\partial y}\\ \frac{\partial(5x)}{\partial x} & \frac{\partial(5x)}{\partial y}\\ \frac{\partial(y^3)}{\partial x} & \frac{\partial(y^3)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x\\ 5 & 0\\ 0 & 3y^2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$Jf\circ g=Jf(g)\cdot Jg=\begin{pmatrix}6xy & 10x & 2y^3\\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & x\\ 5 & 0\\ 0 & 3y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6xy^2+50x & 6x^2y+6x^5\\ 50xy^4 & 100x^2y^3\end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sea $f:D'\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ una función definida en el abierto $D'\subset\mathbb{R}^m$ y sea $g:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función definida en el abierto $D\subset\mathbb{R}^n$. Si g es diferenciable en $x_0\in D$ y f es diferenciable en $g(x_0)\in D'$ entonces la función $f\circ g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0*

Demostración. Tenemos que probar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))Jg(x_0)h\|}{\|h\|}=0 \tag{1}$$

y para esto vamos a trabajar el numerador de la expresión anterior, tenemos entonces que

$$\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))Jg(x_0)h\|=$$

$$\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))(g(x_0+h)-gx_0)+Jf(g(x_0))(g(x_0+h)-gx_0)-Jf(g(x_0))Jg(x_0)h\|=$$

$$\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))(g(x_0+h)-gx_0)+Jf(g(x_0))\left[(g(x_0+h)-gx_0)-Jg(x_0)h\right]\|\le$$

$$\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))(g(x_0+h)-gx_0)\|+\|Jf(g(x_0))\left[(g(x_0+h)-gx_0)-Jg(x_0)h\right]\|\le$$

Como $\|Jf(g(x_0))h\|\le M\|h\|$

$$\|f(g(x_0+h))-f(g(x_0))-Jf(g(x_0))(g(x_0+h)-gx_0)\|+M\|(g(x_0+h)-gx_0)-Jg(x_0)h\|$$

Como g es diferenciable en x_0, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|h\| < \delta_1$ entonces

$$\frac{\|(g(x_0+h) - gx_0) - Jg(x_0)h\|}{\|h\|} < \frac{\epsilon}{2M}$$

por lo tanto

$$\|(g(x_0+h) - gx_0) - Jg(x_0)h\| < \frac{\epsilon\|h\|}{2M}$$

Ahora para

$$\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))(g(x_0+h) - g(x_0)\|$$

Como f es diferenciable en $g(x_0)$ entonces

$$\frac{\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))h\|}{\|h\|} < \frac{\epsilon}{2M_1} \Rightarrow \|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))h\| < \frac{\epsilon}{2M_1}\|h\|$$

por lo tanto

$$\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))(g(x_0+h) - g(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2M_1}\|g(x_0+h) - g(x_0)\|$$

ahora bien

$$\|g(x_0+h) - g(x_0)\| = \|g(x_0+h) - g(x_0) - Jg(x_0)h + Jg(x_0)h\| \leq \|g(x_0+h) - g(x_0) - Jg(x_0)h\| + \|Jg(x_0)h\|$$

$$\underbrace{\leq}_{\epsilon=1} \|h\| + M\|h\| = \|h\|M_1$$

por lo tanto

$$\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))(g(x_0+h) - g(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2M_1}\|g(x_0+h) - g(x_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2M_1}\|h\|M_1 = \frac{\epsilon}{2}\|h\|$$

regresando ahora a (1) y tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ se tiene que si $\|h\| < \delta$

$$\frac{\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))Jg(x_0)h\|}{\|h\|} < \frac{1}{\|h\|}\left(\frac{\epsilon}{2}\|h\| + M\frac{\epsilon\|h\|}{2M}\right) = \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - Jf(g(x_0))Jg(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

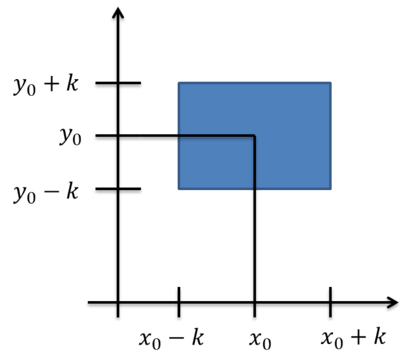
■

Teorema de la Función Implícita (versión 1)

Teorema 2. *Considere la función $y = f(x)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0) y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*
Entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0), tal que $y_0 = f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como $y' = f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, $x \in \mathcal{V}$.

Demostración. Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ supongamos sin perdida de generalidad que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Por ser $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continua en una vecindad de (x_0, y_0) entonces exite un cuadrado S, centrado en (x_0, y_0) totalmente contenido en esa vecindad, en donde $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0 \ \forall \ x, y \in S$.
Sea

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < k \ y \ |y - y_0 < k|\}$$



En todo punto (x, y) que pertenece a S, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Esto quiere decir que en S, F es creciente y fijando x_0 en $[x_0 - h, x_0 + h]$) se tiene que F es creciente en $[y_0 - k, y_0 + k]$ y se anula en y_0, por lo que

$$F(x_0, y_0 - k) < 0 \quad y \quad F(x_0, y_0 + k) > 0$$

Consideremos ahora el par de funciones $F(x, y_0 - k)$ y $F(x, y_0 + k)$ definidas en el intervalo $(x_0 - k, x_0 + k)$. Donde ambas funciones solo tienen x como variable. La primera función cumple $F(x_0, y_0 - k) < 0$ y por ser continua en x_0, es negativa en toda una vecindad $(x_0 - h_1 x_0 + h_1)$ de x_0.
Analogamente, la segunda función cumple $F(x_0, y_0 + k) > 0$ y por ser continua en x_0, es positiva en toda una vecindad $(x_0 - h_2 x_0 + h_2)$ de x_0.
Sea $h = \min h_1, h_2$. Entonces para toda x tal que $|x - x_0| < h$ se tiene

$$F(x, y_0 - k) < 0 \quad y \quad F(x, y_0 + k) > 0$$

Fijemos x en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, y consideremos a $F(x, y)$, sólo como función de y, sobre $[y_0 - k, y_0 + k]$. Esta función cumple que

$$F(x, y_0 - k) < 0 \quad y \quad F(x, y_0 + k) > 0$$

por lo tanto segun el teorema del valor intermedio, existe un único y en $(y_0 - k, y_0 + k)$ tal que $F(x, y) = 0$. Así queda establecida la existencia y unicidad de la función $y = f(x)$. Donde además, $y_0 = f(x_0)$, y para todo $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

$$F(x, f(x)) = 0, \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

■

Ejercicio Si

$$y' = f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$$

calcular y''

Solución En este caso

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dx}\right] - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\right] - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$